Dénombrement (Rappel)

Les ensembles considérés dans ce chapitre ont un nombre fini d'éléments.

1. Cardinal d'un ensemble

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E. On le note Card E.

1.1 Réunion de deux ensembles disjoints

A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble fini E.
A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.
Si A et B sont disjoints alors card $(A \cup B)$ = card A + card B.

On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $\overline{A}$ ou $C_E A$ des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
Si A est une partie de E, alors card $\overline{A}$ = card E - card A.

1.2 Réunion de n sous-ensembles disjoints deux à deux

Soit l'ensemble fini $E = A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n$. Si A_1, A_2, ... A_n sont deux à deux disjoints, alors :
card E = card A_1+ card A_2 + ... + card A_n.

1.3 Réunion d'ensembles

Quels que soient les ensembles finis A et B : card $(A \cup B)$ = card A + card B - card $(A \cap B)$.

2. Produit cartésien

2.1 Définition

Soient E et F deux ensembles finis. Le produit cartésien E x F est l'ensemble des couples (x ; y) où x est élément de E et y est élément de F.

Exemple : Soit E= {1 ; 2 ; 3 ; 4} et F = {a ; b ; c}
On peut représenter le produit cartésien par le tableau :

E \ F	a	b	c
1	(1; a)	(1 ; b)	(1 ; c)
2	(2 ; a)	(2 ; b)	(2 ; c)
3	(3 ; a)	(3 ; b)	(3 ; c)
4	(4 ; a)	(4 ; b)	(4 ; c)

2.2 Cardinal du produit cartésien

Pour deux ensembles finis E et F : card (E x F) = card E x card F.

Plus généralement, on démontre que :
card (E_1 x E_2 x ... x E_p) = card E_1 x card E_2 x ... x card E_p.

2.3 Nombres de p-listes (ou p-uplets) de E

Définition
Soit E un ensemble non vide de cardinal n. Une p-liste d'éléments de E est une liste ordonnée (a_1, a_2, ... , a_p) de p éléments de E (non nécessairement distincts)

Une p-liste de E est un élément de E^p = E x E x...x E, produit cartésien de p ensembles égaux à E.
Une p-liste est donc un p-uplet (ou suite de longueur p, ou mot de longueur p) d'éléments de E.

Exemple : E = {a ; b ; c}
(a ; b), (a ; a), (c ; b) sont des 2-listes (ou couple) de E.
(a ; a ; a ; b), (a ; c ; b ; b) sont des 4-listes de E.

Soit E un ensemble à n éléments et soit p un entier naturel non nul. Le nombre de p-listes de E est n^p.

2.4 Ensembles des parties d'un ensemble

Soit E = {a ; b ; c ; d}
Pour dénombrer les parties de E on peut utiliser un arbre :

Le nombre des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

3. Arrangements - Combinaisons

3.1 Nombre d'arrangements

Définition
Soit E un ensemble fini et p un entier naturel non nul (p ≤ card E).
Un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Remarque :
Deux arrangements à p éléments de E diffèrent :
- soit par la nature de leurs éléments
- soit par l'ordre de leurs éléments.

Soit Card E = n, le nombre d'arrangements à p éléments de E, noté $\mathbf{A_n^p}$, est

$\mathbf{A_n^p}$ = n. (n-1)....(n-p+1).

Définition
On appelle permutation de E un arrangement à n éléments de E.
Le nombre de permutations de E est : A_n^n = n. (n-1)....3.2.1.

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle factorielle n l'entier naturel noté n! défini par

0 ! = 1

n ! = n. (n-1) 3.2.1

3.2 Nombres de combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini et p un entier naturel non nul (p ≤ card E).

Une combinaison à p éléments de E est une partie à p éléments de E.

Remarque : Deux combinaisons à p éléments de E diffèrent par la nature de leurs éléments.

Le nombre de combinaisons à p éléments de E, noté C_n^p, est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

3.3 Propriétés de A_n^n et C_n^p

$A_n^0 = 1$; $\qquad A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

$C_n^0 = 1$; $\qquad C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$C_n^p = C_n^{n-p}$ pour $0 \le p \le n$

$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$ pour $0 \le p < n$

4. Triangle de Pascal

Pour des valeurs de n et p tel que n ≥ p, on a :

n\p	0	1	2	3	4	5	...
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
...	...	...	...	...	...	...	...

En remplaçant C_n^p par sa valeur :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux nombres réels ou complexes. On a :
$a + b = 1a + 1b$
$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1b^2$

Les coefficients de produits des puissances de a et b sont ceux du triangle de Pascal.
On démontre par récurrence que : pour tous nombres réels ou complexes a et b et pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Ou encore :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Remarque : Soit E un ensemble à n éléments.
C_n^0 est le nombre des parties de E ayant 0 élément.

C_n^1 est le nombre des parties de E ayant 1 élément. ...

C_n^p est le nombre des parties de E ayant p éléments.

Leur somme, nombre des parties de E, est égale à 2^n.

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$$