EXERCICES SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1 :

I) – U_1 ; U_n ; r et S_n désignant respectivement le premier terme, le $n^{\text{ième}}$ terme, la raison et la somme des n premier termes d'une suite arithmétique, calculer :

1) U_n et S_n , connaissant $U_1 = 7$; $n = 120$; $r = 5$;
2) U_1 et S_n , connaissant $U_n = 326$; $n = 72$; $r = 2$;
3) r et S_n , connaissant $U_1 = 397$; $U_n = 64$; $n = 1000$;
4) n et U_n , connaissant $U_1 = 50$; $r = -4$; $S_n = 330$;
5) n et r , connaissant $U_1 = -3$; $U_n = 6$; $S_n = 28{,}5$;
6) U_1 et U_n , connaissant $n = 54$; $r = 4$; $S_n = 270$;

II) – Calculer dans le cas suivant d'une suite géométrique :

1) U_n et S_n , connaissant $U_1 = 2$; $q = 3$; $n = 5$;
2) q et S_n , connaissant $U_1 = 162$; $U_n = 32$; $n = 5$;
3) U_1 et S_n , connaissant $U_n = 54$; $q = 3$; $n = 4$;
4) U_1 et U_n , connaissant $q = 0{,}5$; $n = 7$; $S_n = 571{,}5$;
5) n et q , connaissant $U_1 = 48$; $U_n = 243$; $S_n = 633$;

EXERCICE 2 :

1°) Etudier le sens de variation de chacune des sui tes suivantes définies par

a) $u_n = 3n - 8$; b) $v_n = -5n + 4$; c) $w_n = 7n - 3$.

2°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser son premier terme u_0 et sa raison.

3°) Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $t_{n+1} = \dfrac{t_n + 4}{3}$.

On pose $k_n = t_n - 2$; montrer que (k_n) est une suite géométrique dont déterminera la raison et le premier terme.

EXERCICE 3 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$

1°) représenter graphiquement les cinq premiers ter mes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.

2°) On pose $v_n = u_n - \alpha$. ($\alpha \in \mathbb{R}$)

a) Déterminer α pour que (V_n) soit une suite géométrique.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 4 - 8\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$; on note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Trouver l'expression de S_n en fonction n.

d) Déterminer les limites des suites (u_n) et (S_n).

EXERCICE 4 :

On considère la suite (U_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Justifier que $\forall n > 1$, $u_n \geq 1$.

3°) On pose $v_n = (u_n - 1)^2$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

EXERCICE 5 :

On considère la suite (U_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$

1°) Calculer les termes u_1 ; u_2 ; u_3.

2°) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$; la suite (v_n) est-elle géométrique ?

3°) Soit $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Montrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$.

c) En déduire l'expression de u_{n+1} puis celle de u_n en fonction de n.

EXERCICE 6 :

I – On considère la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} V_1 = 1 \\ 5V_{n+1} = V_n + 8 \end{cases}$

1) Calculer V_2 ; V_3 ; V_4 ;
2) On pose $U_n = V_n - 2$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.
3) Démontrer que la suite (V_n) est convergente et trouver sa limite ;
4) Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$.
5) Calculer : $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

II –

Soient a, b, c, d, e cinq termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r telle que : $\begin{cases} a+b+d+e = 60 \\ d+e = 42 \end{cases}$.

1) Exprimer a , b , d et e en fonction de c et r.

2) Déterminer les nombres réels a , b , c , d , e.

EXERCICE 7 :

I) – 1°) Trouver 3 nombres consécutifs a , b , c d'une suite arithmétique sachant que :

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{12}{7} \\ 5a-6b+c=\dfrac{-10}{2} \end{cases}$$ Donner la raison de cette suite.

2°) Trouver 3 nombres a , b , c en progression géométrique sachant que :

$$\begin{cases} a+b+c=403 \\ c-a=312 \end{cases}$$

II) Soit (U_n) une suite arithmétique croissante telle que :

$$\begin{cases} U_1+U_2+U_3=9 \\ U_1^2+U_2^2+U_3^2=35 \end{cases}$$

1. Calculer le premier terme U_0 et la raison r de cette suite, puis exprimer le terme général U_n en fonction de n.

2. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n=2^{Un}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera V_0 et q.

b) Calculer : $P_n=V_0\times V_1\times V_2\times.........\times V_n$.

EXERCICE 8 :

1. Déterminer une progression arithmétique de quatre termes a , b , c , d ayant pour raison r = 6 telle que le produit des termes est égal à 385.

2. Soit la suite arithmétique (U_n) de raison r, (r $\neq$0) tel que dans cet ordre U_2 ; U_4 ; U_7 sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q $\neq$1.

a) Montrer que U_0 = 2r et q = $\frac{3}{2}$

b) Sachant que U_2 = 3, calculer U_0 puis U_n en fonction de n.

c) Soit la suite (V_n) définie par : $V_n=e^{Un}$;

Calculer $S_n=U_0+U_1+.........+U_n$ puis en déduire $P_n=V_0\times V_1\times........\times V_n$.

EXERCICE 9 :

1) L'Opération Puits, une entreprise de forage estime le coût d'un puits à grand diamètre comme suit :

- le premier mètre creusé coûte 1000 F
- le second mètre creusé coûte 1050 F et chaque mètre creusé coûte 50 F de plus que le précédent. Quelle serait la profondeur maximale de ce puits si le crédit alloué à l'entreprise est de 519 750 F ?

2) Une société Forestière décide de créer un bosquet (Petit bois, touffe d'arbres) à chaque kilomètre entre deux villes A et B distant de 300 Km.

- Au premier kilomètre le bosquet compte 15 arbres
- Au second kilomètre le bosquet compte 22 arbres et à chaque kilomètre qui suit le bosquet compte 7 arbres de plus que le précédent.

Quel est le nombre d'arbres que compte le dernier bosquet ?
Quel est le nombre total d'arbres que la société doit planter ?

EXERCICE 10 :

1. Trouver sept termes d'une suite géométrique : U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5 ; U_6 ; U_7

tels que : $\frac{U_5}{U_1} = \frac{U_5 + U_6 + U_7}{U_1 + U_2 + U_3}$ *et* $\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 2 \\ U_5 + U_6 + U_7 = 1250 \end{cases}$

2. Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 5 \end{cases}$

   a) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

   b) On pose $V_n = \alpha U_n - 10$. Quelle valeur faut-il donner à α pour que (V_n) soit une suite géométrique.

   c) Exprimer Un en fonction de n puis calculer $S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n$.

EXERCICE 11:

A/– soit (U_n) définie par la relation $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

1. Montrer que la suite (U_n) est à terme positif et majorée par 2.
2. Démontrer par récurrence que (U_n) est croissante ;
3. la suite (U_n) est-elle convergente ?justifier.

B/– Soit u la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n e^{-Un}$ ($n \in \mathbb{N}$).

On pose $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$;

1. Montrer que u est à termes positifs.
2. Montrer que u est décroissante.
3. En déduire que u converge et trouver sa limite.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $U_{n+1} = e^{-Sn}$.

EXERCICE 12:

Un épargnant dispose au 1er janvier 2006 d'un capital C_0 = 10 000F qu'il place à la Bank of Africa (BOA) à un taux de 6% l'an. Au bout de chaque année le capital est augmenté des intérêts qu'il produit. On désigne par C_n la valeur du capital au bout de n années.

1) Calculer C_1 ; C_2 ; C_3.
2) Démontrer que : $C_n = C_0 \times (1{,}06)^n$.
3) Au bout de combien de temps n le capital C_0 aura-t-il doublé ?
4) En supposant le prix du marché stable, en quelle année son capital peut payer une voiture dont le prix est 20 000F ?

EXERCICE 13:

A/– On pose $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $U_n = \underbrace{1111..........111}_{n\ \ fois}$

1) Calculer U_n en fonction de n.
2) Soit $S_n(a) = a + aa + aaa + ... + \underbrace{aaa......aaa}_{n\ \ fois}$. Calculer : $S_n(1)$ en fonction de n.
3) Calculer $S_n(a)$ en fonction de n et de a.
4) Calculer $S = S_n(1) + S_n(2) + ……………+ S_n(9)$.

B/– Soient (Δ_1) ; (Δ_2) ; (Δ_3) ; ……. ; (Δ_n) ; n droites d'un plan $\mathcal{P}$, sécantes deux à deux en des points distincts. Soit U_p le nombres des régions du plan, déterminées par p de ces droites. Etablir une relation entre U_{p+1} et U_p. En déduire Un en fonction de n.

EXERCICE 14:

Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies par :

$$U_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} \qquad et \qquad V_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

On pose $d_n = U_n - V_n$ et $w_n = U_n + V_n$.

1. montrer que (d_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme.
2. montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.
3. déduire de ce qui précèdent les sommes suivantes :

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 +……..+ U_n$ et $S_n' = V_0 + V_1 + ………+ V_n$.

EXERCICE 15:

L'étude de la production intérieure brute, au Mali (en milliard de francs) a donné le résultat suivant :

Si P(n) désigne la production intérieure de l'année numérotée n, ($n \in \mathbb{N}$), le rapport : $\frac{P(n+1)-P(n)}{P(n)} = 0{,}11$ constant. On suppose P(0)= 140.

1. a) calculer P(n+1) en fonction de P(n) ;
   b) calculer P(1) et P(2).
   c) calculer P(n) en fonction de P(0) et n. En déduire P(10). (On arrondira au milliard supérieur).
2. A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à $3\times$P(0) ?

3. A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à 14.000 ?

EXERCICE 16 :

1. pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}\,dx$

   a) calculer $\mathbf{I_n}$ en fonction de n à l'aide d'une intégration par parties.

   b) Etudier la convergence de la suite ($\mathbf{I}_n$).

2. pour tout entier naturel n on pose : $S_n = \sum_{i=0}^{n} I_i$.

a) Calculer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

b) calculer une valeur approchée de S_{10}.

EXERCICE 17 :

On pose $I_0 = \int_1^e x\,dx$ *et* $\forall n \in IN^*$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1°) Calculer I_0 puis I_1 en utilisant une intégration par parties.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ établir que : $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

3°) Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante sur [1 ;e].

4°) En déduire en utilisant la relation de récurren ce de la question 2°) que $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

EXERCICE 18 :

A/- soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$;

1) démontrer que (U_n) est à termes positifs et majorée par 5.

2) Quelle est la limite éventuelle de la suite (U_n) ?

3) Etudier le sens de variation, puis la convergence de (U_n).

4) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\left|U_{n+1} - 3\right| \leq \frac{1}{3}\left|U_n - 3\right| \quad et \quad \left|U_n - 3\right| \leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

B/- Un bien qui valait au départ 5.000.000 Frs se déprécie d'année en année suivant la loi suivante :
La valeur du bien de l'année considérée est égale au produit du bien de l'année précédente par 0,65, ce produit augmenté de 550.000 frs.

1) Au bout de combien d'années le bien sera-t-il inférieur à 1 572 384,6 Frs ?

2) Est-il possible que le bien soit un moment inférieur à 1 571 420 ?.

EXERCICE 19 :

Le plan complexe est rapporté au repère (O, i ; j) unité graphique 2cm. Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe 2i et A_1 le milieu du segment $[A_0\ A'_0]$.

Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n ; on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_n ; A'_n]$.
On note P_n et θ_n le module et l'argument de z_n.

1°) Déterminer les affixes des points A_1 ; A_2 ; et A_3.
Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et θ_1 ; θ_2 ; θ_3.

2°) a) Pour tout entier n, exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n.
b) Exprimer P_n et θ_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite de la suite (P_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
d) Comparer les modules et les arguments de Z_n et Z_{n+8}.

3°) Établir que : $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$.

4°) Après avoir exprimé A_nA_{n+1} en fonction de n, déterminer en fonction de n la longueur D_n de la ligne brisée : $A_0 A_1 A_2 \ldots\ldots A_{n-1} A_n A_{n+1}$. Déterminer la limite de la suite (D_n).

EXERCICE 20 :

Un fonctionnaire consacre 80% de son revenu à une épargne. Ce fonctionnaire voit son revenu annuel augmenter de 3% par an et décide de diminuer la part de l'épargne dans son revenu annuel de 2,5% par an. Le revenu initial du fonctionnaire est R_0 = 400 000 F. On désigne par R_n le revenu annuel du fonctionnaire et E_n l'épargne annuelle au bout de n années ($n \in \mathbb{N}$).

1°) Calculer l'épargne initiale E_0 du fonctionnaire.
2°) Calculer le revenu R_1 et l'épargne E_1 de l'année suivante (n = 1) ;
3°) Calculer le revenu R_2 et l'épargne E_2 de l'année suivante (n = 2) ;
4°) Exprimer R_n en fonction de R_0 et n ; puis E_n en fonction de E_0 et n.

5°) Calculer la limite de E_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 21 :

Soit la suite (z_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + i) \end{cases}$

1°) Soit dans le plan complexe P muni du repère orthonormé (O ;I ;J) les points M_n d'affixes Z_n. Placer M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4.

2°) Soit (X_n) *et* (Y_n) les suites de nombres réels définies par $\forall n \in IN,\ Z_n = X_n + iY_n$. Exprimer X_{n+1} *et* Y_{n+1} respectivement en fonction de (X_n) *et* (Y_n). En déduire (X_n) *et* (Y_n) en fonction de n.

3°) Montrer que (X_n) *et* (Y_n) sont convergentes et donner leurs limites respectives. Que peut-on en déduire pour la suite (z_n) ?

EXERCICE 22 :

I - Soit une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r.

1°) Calculer u_1 et r sachant que $u_{100} = 781$ et $u_1 + u_2 + \ldots + u_{100} = 38500$

2°) Trouver la plus petite valeur de n pour laquelle $u_1 + u_2 + \ldots + u_{100} \leq 168\,300$

II - Soit la fonction $f\ :\ t \mapsto \frac{1}{t}$ pour $t \in [n; n+1],\ n \succ 0$

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{n}$.

2°) On considère la suite de terme général $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln n$; $n \geq 1$.

Montrer que (U_n) est monotone à termes positifs ; conclure.

EXERCICE 23 :

Pour tout entier naturel n non nul ; on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$

1°) Montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$

2°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n \geq 0$

3°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

4°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite (I_n) est décroissante.

EXERCICE 24 :

Pour tout entier naturel n non nul ; on pose $I_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n = 2n-1$

2°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite (I_n) est bornée

3°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\left(\frac{I_n}{n}\right)$ est convergente

4°) Montrer pour n $\in \mathbb{N}^*$, on a : $I_1 + I_2 + I_3 + \dots\dots + I_n = n^2$.

EXERCICE 25 :

Soit a et b deux réels strictement positifs.

On définit la suite (U_n), pour tout entier naturel n, par

$$U_0 = a \; ; \; U_1 = b \; ; \; U_{n+2} = U_{n+1} + 6U_n.$$

On considère les suites (V_n) et (W_n) définies, pour tout entier naturel n,

$$V_n = U_{n+1} - 3U_n \quad \text{et} \quad W_n = U_{n+1} + 2U_n \; .$$

1°) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison q = –2 et de premier terme $V_0 = b - 3a$.

Déterminer, pour tout entier naturel n, V_n en en fonction de n, a et b.

2°) Montrer aussi que (W_n) est une suite géométrique et exprimer W_n en fonction de n, a et b.

3°) En déduire U_n en fonction de n, a et b.

4°) Montrer que si (U_n) est une suite géométrique, alors sa raison ne peut être que q = –2 ou q = 3.

5°) déterminer la limite de la suite (U_n).