Exemples de suites numériques

1. Suites arithmétiques

1.1 Définition

- Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite.

- Une suite arithmétique est entièrement déterminée par :
  . son premier terme,
  . sa raison,
  . et le nombre de ses termes.
- Exemple : Déterminer la (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_1=-5$ de raison $r=2$ et comprenant 6 termes.

1.2 Propriétés

- La différence de 2 termes consécutifs d'une suite arithmétique est constante. $u_{n+1} - u_n = r$.
- Pour tout entier n, on a $u_n = u_0 + nr$.
- Pour n et k entiers, $u_n = u_k + (n - k) r$.

- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Pour tout n (n> 0) , $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n}{2}[2u_0 + (n-1)r]$

$$\text{somme de termes consécutifs} = \frac{\text{nombre de termes}}{2}\left(\begin{array}{c}1^{er}\text{ terme}\\ \text{de la somme}\end{array} + \begin{array}{c}\text{dernier terme}\\ \text{de la somme}\end{array}\right)$$

- Toute suite arithmétique de raison r > 0 est croissante.
- Toute suite arithmétique de raison r < 0 est décroissante.
- Toute suite arithmétique de raison r = 0 est constante ou stationnaire.
- Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.

2. Suites géométriques

2.1 Définition

- Une suite (un) est géométrique s'il existe un réel q tel que un+1 = q un.
Le réel q est appelé la raison de la suite.

- Une suite géométrique est entièrement déterminée par :
  . son premier terme,
  . sa raison,
  . et le nombre de ses termes.

- Exemple : Déterminer la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1=3$ de raison $q = 2$ et comprenant 4 termes.

2.2 Propriétés

- Le rapport 2 termes consécutifs d'une suite géométrique est constante $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
- Pour tout entier n, on a un = q^n u_0.
- Pour n et k entiers, un = u_k q^{n-k}.
- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (un) une suite géométrique de raison q, on a :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\text{somme de termes consécutifs} = (1^{er} \text{ terme de la somme}).\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

- Toute suite géométrique de raison q = 1 est constante ou stationnaire.
- Toute suite géométrique de raison q = -1 est divergente.
- Toute suite géométrique de raison |q| > 1 est divergente.
- Toute suite géométrique de raison 0 < |q| < 1 converge vers 0.

3. Suites du type $u_n = f(n)$

A toute fonction f définie sur un intervalle de IR, du type $]b;+\infty[$, on peut associer une suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$.

- le sens de variation de f implique celui de la suite.
- si f est majorée, minorée, bornée sur $]b;+\infty[$, il en est de même de la suite.
- si f a une limite l en $+\infty$, alors la suite a aussi pour limite l.

Exemples : monotonie et limite de $u_n = \frac{n}{n^2+n}$; de $v_n = n - \ln n$.

4. Suites définies par des sommes

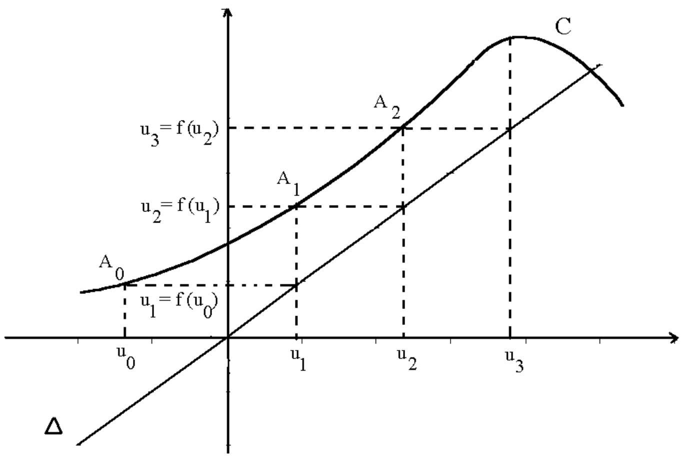
Exemple : On pose, pour tout n de IN*, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

- Montrer que (u_n) est croissante.
- Montrer que pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- En déduire que (u_n) est majorée par 2.
- Montrer alors la convergence de la suite (u_n).

5. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Représentation graphique

On trace dans un repère orthonormal, la courbe C de la fonction f.



Le réel u_0 étant donné, on obtient $u_1 = f(u_0)$ comme ordonnée du point de C d'abscisse u_0 ; soit A_0 ce point.
On place u_1 sur l'axe des abscisses, pour cela, on utilise la droite Δ d'équation $y = x$; le point d'intersection de Δ et de la droite horizontale $y = u_1$ a pour abscisse u_1 : ayant ainsi placé u_1 sur l'axe des abscisses, on peut obtenir u_2 comme l'ordonnée du point de C d'abscisse u_1 ; soit A_1 ce point : on reporte alors u_2 sur l'axe des abscisses, et on continue …

Remarques :
- Le graphique permet de prévoir si la suite est monotone ou non monotone, si la suite a une limite. Cette limite si elle existe, est nécessairement l'abscisse d'un des points d'intersection de C et de Δ.
- On ne peut pas toujours définir la suite (u_n) en se donnant un nombre u_0, et une fonction f, en posant $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple : soit $u_0 = \frac{32}{10}$, et la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x-2}$
- La monotonie de f n'implique pas toujours que la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ soit monotone.

Exemple : la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

La suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n, n'est ni croissante, ni décroissante.

b) Problème d'existence

Lorsque f est une fonction définie au moins sur un intervalle I dont l'image f(I) est incluse dans I (c'est-à-dire que pour tout x de I, f(x) est aussi dans I) ; et lorsque le nombre u_0 appartient à I, alors, on peut définir une suite dont le premier terme est u_0 et qui est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.

c) sens de variation

Contrairement au cas des suites $u_n = f(n)$, dans le cas des suites (u_n) définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ la monotonie de f n'implique pas nécessairement celle de (u_n).

d) Limite d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

(u_n) est une suite et f une fonction telles que pour tout naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite a pour limite l et si la fonction f est continue au point l, alors f(l) = l, et donc l est une solution de l'équation f(x) = x.

Exemple : Soit la suite $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

- Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 2.
- En déduire que (u_n) a une limite L et calculer L.

e) Utilisation des inégalités des accroissements finis pour l'étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$. I est l'intervalle [1,5 ; 3].

1. a) Démontrer que l'image f(I) de I par f est contenue dans I, que u_1 appartient à I, et en déduire que pour tout $n \geq 1$, u_n est dans I.

b) Démontrer que pour tout x de I : $\left|f'(x)\right|=\dfrac{8}{9}$.

2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\left|f(u_n)-2\right|\leq\dfrac{8}{9}\left|u_n-2\right|$.

3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\left|u_{n+1}-2\right|\leq\left(\dfrac{8}{9}\right)^n\left|u_1-2\right|$.

4. En déduire que la suite (u_n) a pour limite 2.

5. A partir de quel rang a-t-on $\left|u_n-2\right|\leq 10^{-4}$?

6. Suites homographiques : $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ avec $(ad-bc\neq 0)$

Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

On montre que :

- Si f(x) = x a deux solutions α et β, la suite définie par $v_n=\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$ est géométrique.
- Si f(x) = x a une solution unique α, la suite définie par $v_n=\dfrac{1}{u_n-\alpha}$ est arithmétique.

Exemple 1. Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n}$, $u_0=1$ et la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2+x}{x}$.

- Vérifier que $\alpha=-1$ et $\beta=2$ sont les solutions de f(x)=x.
- On pose $v_n=\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
- Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. En déduire lim (u_n).

Exemple 2 . Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$, $u_0= -1$ et la fonction $f:x\mapsto\dfrac{4x-1}{x+2}$.

- Vérifier que $\alpha=1$ est le solution de f(x)=x.
- On pose $v_n=\dfrac{1}{u_n-\alpha}$. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

- Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. En déduire lim (u_n).

7. Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante et l'autre est décroissante et la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont même limite.

Exemple. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0=1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ pour tout n de IN, $v_0 = 12$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

- On pose $w_n = v_n - u_n$, pour tout n de IN.
Démontrer que (w_n) est une suite géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
En déduire la limite de (w_n).
- Démontrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.. Que peut-on conclure sur les suites (u_n) et (v_n).
- On pose $t_n = 3\,u_n + 8\,v_n$.
Démontrer que (t_n) est une suite stationnaire. En déduire la limite de (u_n) et (v_n)

8. Suites du type $u_{n+1} = a\,u_n + b u_{n-1}$

On cherche les solutions de la forme (r^n).
- Lorsque l'équation $r^2 - a\,r - b = 0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions sont de la forme $u_n = \lambda r_1^{\,n} + \mu r_2^{\,n}$, où λ et μ sont des constantes.
- Lorsque l'équation $r^2 - a\,r - b = 0$ a une racine double r , les solutions sont de la forme $u_n = (\lambda + \mu.n).\,r^n$, où λ et μ sont des constantes.

Exemples : Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $\qquad u_0 = u_1 = 1$

$3v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1}$ $\qquad v_0 = 7 \quad v_1 = 3$

9. Suites définies à l'aide d'intégrales

Exemple. On pose $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et, pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

- Calculer I_0 et I_1.
- Pour tout $n \in IN^*$, établir la relation de récurrence $2\,I_n + nI_{n-1} = e^2$. Calculer I_2.
- Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
- En utilisant la relation de récurrence, montrer l'encadrement $\dfrac{e^2}{n+3} \le I_n \le \dfrac{e^2}{n+2}$.
- Calculer lim I_n et lim nI_n.

10. Suites extraites

Une suite (v_n) est dite extraite de la suite (u_n) si elle est définie par $v_n = u_{n'}$ avec n'=g(n) où g est une application croissante de IN dans IN.

Si la suite (u_n) est convergente, toute suite extraite (v_n) est convergente et a la même limite.

La réciproque de cette propriété est inexacte, c'est-à-dire qu'il existe des suites non convergentes dont on peut extraire des suites convergentes.

Par exemple, la suite $u_n=(-1)^n$ n'est pas convergente, alors que les suites extraites (v_n) et(w_n) définies par $v_n= (-1)^{2n}$, $w_n=(-1)^{2n+1}$ sont convergentes.

11. Suites complexes

Une suite de nombres complexes est une application de IN dans C.
Le terme général est donc un nombre complexe $u_n = a_n + i\, b_n$ où $a_n \in \mathrm{IR}$, $b_n \in \mathrm{IR}$.

Si $a_n \to a$ et $b_n \to b$, la suite (u_n) est dite convergente.

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

$(|z_n|)_{n\in\mathrm{IN}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$(\arg z_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$

Soit M_n le point d'affixe z_n, on vérifie que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \arg(\frac{z_{n+1}}{z_n}) = \arg(\frac{i+1}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

On retrouve bien $z_n = \frac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.