DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

1. Orthogonalité dans l'espace

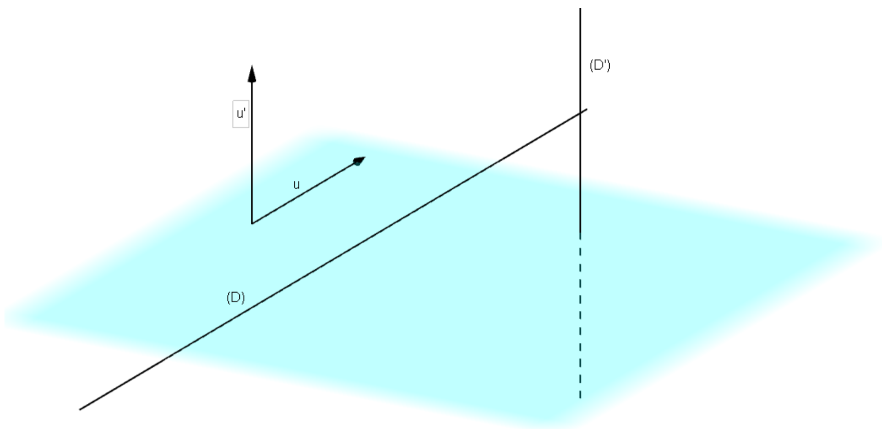
1.1 Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul ($\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = 0).

le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur

1.2 Orthogonalité de deux droites

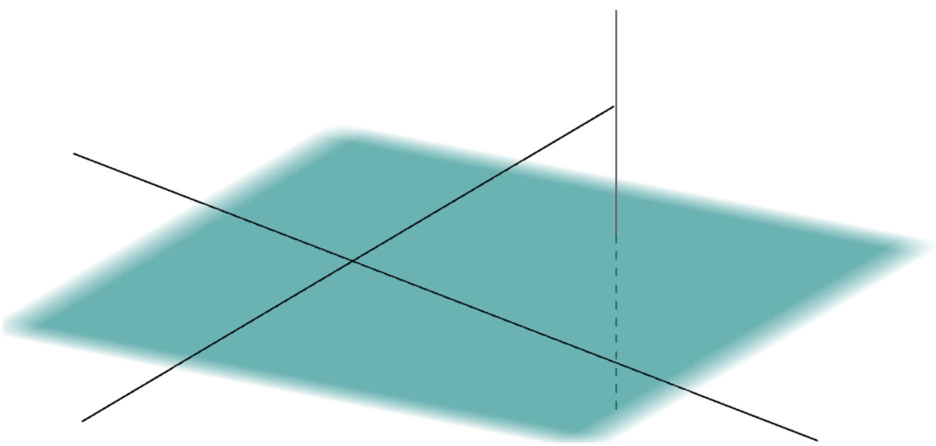
Soient deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs $\vec{u}$ *et* $\vec{u}\,'$. (D) et (D') sont orthogonaux si $\vec{u}$ *et* $\vec{u}\,'$ sont orthogonaux.



On réserve le vocabulaire « perpendiculaire » à deux droites orthogonales et sécantes de l'espace

1.3 Droite orthogonale à un plan

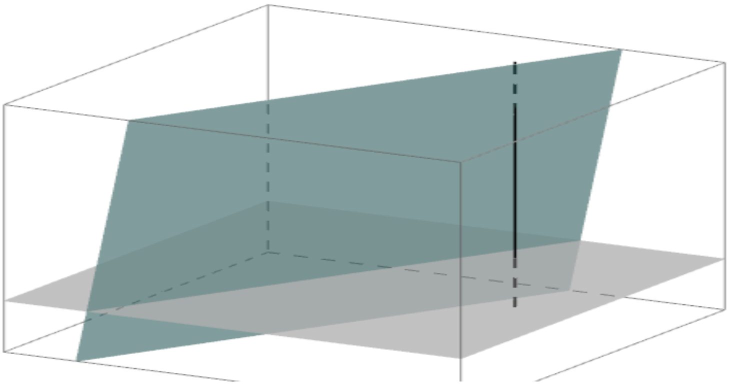
Une droite est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Pour démontrer qu'une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan P , il suffit de trouver deux vecteurs $\vec{e}_1$ *et* $\vec{e}_2$ non colinéaires de P tel que $\vec{u}\,.\,\vec{e}_1$ = 0 et $\vec{u}\,.\,\vec{e}_2$ = 0.

1.4 Plan perpendiculaire

Deux plans P et P' sont perpendiculaires si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.



2. Équations

2.1 Équation paramétrique d'une droite

2.1.1 définition

Dans l'espace muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la droite d passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Un point M(x ; y ; z) appartient à la droite d si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ ⊓, ce qui s'exprime avec les coordonnées par le système :

$$\begin{cases}x-x_A=ka\\y-y_A=kb\\z-z_A=kc\end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases}x=x_A+ka\\y=y_A+kb\\z=z_A+kc\end{cases}$$

Dans l'espace muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, une équation paramétrique de la droite d passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est : $\begin{cases}x=x_A+ka\\y=y_A+kb\\z=z_A+kc\end{cases}$

2.1.2 Exemple

Dans l'espace muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, la droite d passant par A(1, 1, 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=1+k\\y=1+k\\z=1+k\end{cases}$

2.1.3 Remarques

- Une droite a une infinité de représentation paramétrique.
- Une droite ne possède pas une équation cartésienne dans l'espace.
- La lettre k peut être remplacé par n'importe quelle lettre.

2.2 Équation d'un plan

2.2.1 Équation paramétrique

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigé par les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Un point M(x ; y ; z) appartient au plan (P)si et seulement s'il existe deux réels k et t tel que $\vec{AM} = k\vec{u} + t\vec{v}$, ce qui s'exprime avec les coordonnées par le système $\begin{cases} x - x_A = ka_1 + ta_2 \\ y - y_A = kb_1 + tb_2 \\ z - z_A = kc_1 + tc_2 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = x_A + ka_1 + ta_2 \\ y = y_A + kb_1 + tb_2 \\ z = z_A + kc_1 + tc_2 \end{cases}$

Le système d'équation $\begin{cases} x = x_A + ka_1 + ta_2 \\ y = y_A + kb_1 + tb_2 \\ z = z_A + kc_1 + tc_2 \end{cases}$ est appelé une représentation paramétrique du plan (P).

2.2.2 Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé tout plan admet un équation de la forme :

ax + by + cz +d = 0

où a, b, c, d sont des réels non tous nuls. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est alors normal à ce plan.

Réciproquement, l'ensemble des points M(x, y,z) dont les coordonnées vérifient :

ax + by + cz + d = 0

est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Exemple

Soit (P) le plan définit par le point A(3, -1, 2) et le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\vec{AM} = 0$ si 1(x-3)+(-3)(y+1) + (-5)(z – 2) = 0 si x -3y -5z + 4 = 0.

(P) a pour équation : x - 3y - 5z + 4 = 0.