Limite d'une fonction

1. Limite en un point :

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, f une fonction définie sur I sauf peut être en x_0 et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet l comme limite en x_0 , ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 , si, lorsque x prend des valeurs très proches de x_0, les nombres $f(x)$ deviennent très proches de l (ils finissent par appartenir à l'intervalle $]l-\alpha\ ;\ l+\alpha[$, aussi petit que soit le réel positif α)

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f = l$

On dit que la limite de f en x_0 est $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus proches de x_0 , $f(x)$ prend des valeurs indéfiniment grandes.

(f(x) peut être plus grand que n'importe quel nombre M, aussi grand soit-il, pourvu que x soit assez proche de x_0)

<u>Exemple :</u> $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-10}	10^{-100}
$f(x)$	10	100	10^{10}	10^{100}

Quand x prend des valeurs très proches de 0, f(x) devient indéfiniment grande donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

On dit que la limite de f en x_0 est $-\infty$ si $\lim\limits_{x_0} -f(x) = +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

2. Limite à l'infini :

On dit que f a pour limite *l* en $+\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes, f(x) devient très proche de *l* .

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

<u>Exemple :</u> $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On dit que f est pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ devient indéfiniment grand.

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = +\infty$

3. Fonctions de référence :

- $f(x)=x$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x)=x_0$ quel que soit le réel x_0.

- $f(x)=a \ (a \in R)$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x)=a$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=a$, $\lim_{x \to x_0} f(x)=a$ quel que soit le réel x_0.

- $f(x)=\frac{1}{x}$

  $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x)=0$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0$

4. Limite à gauche – limite à droite :

Soit une fonction définie sur $]x_0;x_0+\alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que l est la limite de f à droite en x_0 si l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x > x_0$.

On écrit $l=\lim_{x \to x_{0^+}} f(x)$

Si f est définie sur $]x_0-\alpha;x_0[$, on dit que l est la limite de f à gauche de x_0 si l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x < x_0$.

On écrit $l=\lim_{x \to x_{0^-}} f(x)$

Exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x)=-\infty$

5. Opérations sur les limites

- **Limite d'une somme :**

lim f	**lim g**	**lim (f+g)**
l	l'	l+l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
l	∞	∞

- **Limite d'un produit :**

lim f	lim g	lim (f.g)
l	l'	l.l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l \neq 0$	∞	∞
0	∞	Forme indéterminée

- **Limite d'un quotient :**

lim f	lim g	lim (f/g)
l	$l' \neq 0$	l/l'
∞	∞	Forme indéterminée
l	∞	0
0	0	Forme indéterminée
$l > 0$	0^+	$+\infty$
$l > 0$	0^-	$-\infty$
∞	0	∞

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{x} \right) = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x \right) = +\infty$

Remarque

- Lorsque la limite d'une fonction est de la forme $\dfrac{l}{0}$ où $l \neq 0$, alors le résultat est ∞. Pour savoir si c'est $+\infty$ ou $-\infty$, on étudie le signe du dénominateur.

Exemple : $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$

Calculons les limites à droite et à gauche en -1 et en 2.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{3}{0}$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x+1		−		−	0	+	
x-2		−	0	+		+	
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	

- $\lim_{x \to -1} (x+1) = 1 > 0$
- Pour x < -1, $x^2 - x - 1 > 0$, donc $x^2 - x - 1$ tend vers 0^+ .

$$\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{x+1}{x^2 - x - 2} \right) = +\infty$$

- Pour -1 < x <2, $x^2 - x - 1 < 0$, donc $x^2 - x - 1$ tend vers 0^- .

$$\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{x+1}{x^2 - x - 2} \right) = -\infty$$

- $\lim_{x \to 2} (x+1) = 3 > 0$
  - Pour -1 < x <2, $x^2 - x - 1 < 0$, donc $x^2 - x - 1$ tend vers 0^- .

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x+1}{x^2 - x - 2} \right) = -\infty$$

  - Pour x > 2, $x^2 - x - 1 > 0$, donc $x^2 - x - 1$ tend vers 0^+ .

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x+1}{x^2 - x - 2} \right) = +\infty$$

- **Limite d'une fonction irrationnelle :**

- Si $f(x) \geq 0$ dans un intervalle ouvert contenant x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Exemple

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)}$$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = 2$ **d**onc $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \right) = \sqrt{2}$
- $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = +\infty$, donc $\lim_{x \to 1^+} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \right) = +\infty$