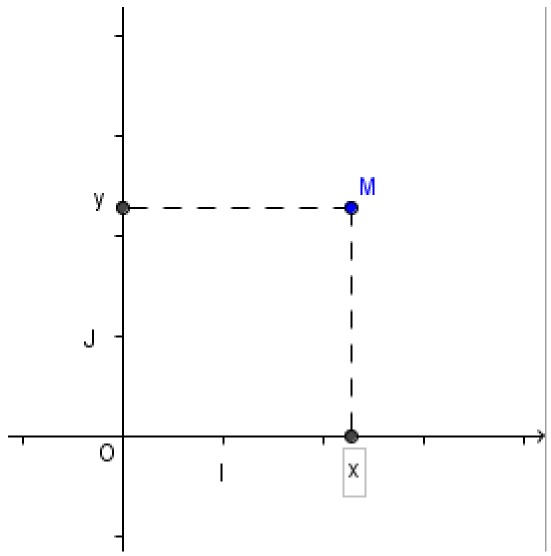
VECTEURS DU PLAN : composantes

1. Coordonnées d'un point

1.1 Théorème et définition

Soit(O, I, J) un repère orthonormé de l'ensemble des points du plan. Il existe un unique couple (x : y) vérifiant : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

Dans le repère (O, I, J) le point M a pour coordonnées (x; y) et on note M(x; y). x est appelé abscisse du point M, y l'ordonnée de M.



1.2 Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne les points A(x_A : y_A), B(x_B : y_B), I(x_I ; y_I).

I est le milieu du segment [AB], si et seulement si, $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$, $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$.

Exercice : Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne A(2 ; -1), B(4 ; 2) . Calculer les coordonnées du milieu I.

$$x_I=\frac{2+4}{2}=3 \quad \text{et} \quad y_I=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

1.3 Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne les points A(x_A : y_A), B(x_B : y_B) , la distance AB est:

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Exercice : Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne A(2 ; -1), B(4 ; 2) , calculer la distance AB.

$$AB=\sqrt{(4-1)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{18}$$

Ainsi $AB=3\sqrt{2}$

2. Composantes d'un vecteur

2.1 Vecteur défini par deux points

Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne les points A(x_A : y_A), B(x_B : y_B). Le vecteur $\vec{AB}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et on écrit $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exeemple :

- Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne A(2 ; -1), B(4 ; 2) .

  1) Placer ces points dans le repère

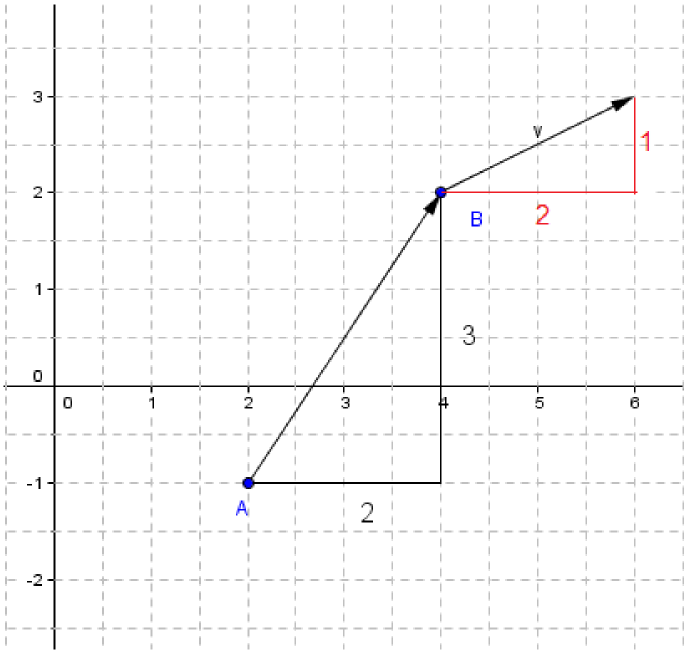
  2) Calculer les composantes de $\vec{AB}$

  3) Peut-on lire directement ces composantes ?

  4) Construire le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'origine B

Réponse :

Avec Géogebra, on obtient le schéma suivant :



2) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ce qu'on voit directement sur la figure (question 3))

4) Le vecteur $\vec{v}$ se construit en partant de l'origine B, en se déplaçant de 2 unités suivant $\vec{i}$ et d'une unité suivant $\vec{j}$.

2.2 Composantes de la somme de deux vecteurs

Soit A, B, C, D quatre points du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$

si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour composantes $\vec{w}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$

Exemple : On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes de $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Réponse

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+(-1) \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.3 Composantes du produit d'un réel par un vecteur

Si le vecteur $\vec{u}$ a pour composantes $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le vecteur $\vec{w} = k\vec{u}$ a pour composantes $\vec{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour composantes $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes de $\vec{w} = -3\vec{u}$, $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v}$

Réponse

$\vec{w} = -3\vec{u}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix} -3.1 \\ -3.1 \end{pmatrix}$ ainsi $\vec{w}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{t} = \vec{u} - \vec{v}$ donc $\vec{t}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix}$ ainsi $\vec{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$