

Séquence 3 : Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

1. Équation à deux inconnues

Une **équation linéaire à deux inconnues** est une équation de la forme $ax+by=c$ où a , b et c sont des réels.

Résoudre dans \mathbb{R}^2 une telle équation, c'est chercher tous les couples $(x ; y)$ vérifiant cette égalité.

Une telle équation admet une infinité de solutions.

Exemple : $2x - 3y = -1$.

$(1;1)$, $(0; \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}; 0)$... sont des solutions de cette équation.

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

On obtient une équation équivalente à celle-ci en multipliant, en divisant ou en ajoutant les deux membres de l'inégalité par un même nombre non nul.

2. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

C'est un système de la forme $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a , b , c , a' , b' et c' sont des réels.

Résoudre un tel système c'est chercher tous les couples $(x ; y)$ vérifiant à la fois les deux équations.

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils possèdent les mêmes solutions.

Méthodes de résolution :

Résoudre le système $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a , b , c , a' , b' et c' sont des réels.

2.1 Substitution

La méthode consiste à :

- Isoler une des inconnues dans l'une des équations, par exemple x (ce qui revient à exprimer x en fonction de l'autre inconnue y) dans la première équation ;
- Remplacer x par cette expression obtenue dans la deuxième équation ;
- On obtient alors une équation en y du premier degré que l'on peut résoudre facilement ;
- Remplacer y dans la première équation par sa valeur trouvée, puis résoudre cette équation en x .

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$.

De la première équation, on a : $x = \frac{y+3}{2}$.

En remplaçant x par cette valeur dans la deuxième équation, on a $\frac{y+3}{2}+2y=-1$ ou, en mettant au même dénominateur, $\frac{y+3+4y}{2}=-1$. La résolution donne $y = -1$.

En remplaçant y dans la première équation, on trouve $x = 1$.

L'ensemble des solutions est donc $S = \{ (1 ; -1) \}$.

2.2 Combinaison linéaire

La méthode consiste à :

- Multiplier les deux membres de la première équation par un nombre k et les deux membres de la deuxième équation par un nombre k' de manière à obtenir le même coefficient de x dans les deux équations. On obtient un système équivalent au premier ;
- Faire la soustraction membre à membre des deux équations. On obtient une équation à une seule inconnue (ici y) que l'on peut résoudre sans difficulté ;
- Refaire les mêmes opérations avec les coefficients de y , et on obtient une équation avec une seule inconnue (ici x).

Remarque :

On peut ne pas faire la troisième étape, mais seulement prendre la valeur de x trouvée dans la deuxième étape et la rapporter dans l'autre équation.

Exemples :

1. On va reprendre l'exemple précédent (S) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

En multipliant la première équation par 2, on obtient le système suivant, équivalent à (S) :

$$\begin{cases} 4x-2y=6 \\ x+2y=-1 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations, on a :

$$(4x-2y)+(x+2y) = 6 +(-1)$$

Ce qui donne $5x = 5$. D'où $x = 1$.

De la même façon, en multipliant par 2 la deuxième équation du système (S), on a le système

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+4y=-2 \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre, on a $(2x-y)-(2x+4y)=3-(-2)$

Ce qui donne $-5y=y$, d'où $y = -1$

On retrouve bien l'ensemble des solutions $S = \{(1 ; -1)\}$

2. Résoudre le système : (S) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x-2y=3 \end{cases}$.

On multiplie la deuxième équation par 2, on obtient le système $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$ équivalent à (S).

Par soustraction membre à membre, on a : $0.x + 7y = -7$, ce qui donne $y = -1$.

De même, en multipliant la première équation par 2 et la deuxième par 3, on obtient le système

$$\begin{cases} 4x+6y=-2 \\ 3x-6y=9 \end{cases} \text{ équivalent à (S).}$$

Par addition membre à membre, on a : $7x + 0.y = 7$, ce donne $x = 1$.

L'ensemble des solutions est donc $S = \{(1 ; -1)\}$.

2.3 Déterminant (Méthode de Cramer)

On utilise ici des résultats vus en géométrie pour résoudre le système $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Chacune de ces équations est une équation d'une droite, soit (D) et (D').

On calcule les nombre suivants, appelés déterminants du systèmes : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a b' - a' b$,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = c b' - c' b \text{ et } \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = a c' - a' c.$$

- Si $\Delta \neq 0$, on a une solution unique : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.
- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0$, alors les deux équations du système sont équivalentes. On résout une des deux équations, par exemple $ax + by = c$.

Pour résoudre dans \mathbb{R}^2 l'équation $ax + by = c$, avec $(a,b) \neq (0,0)$, on réorganise les termes de cette équation pour isoler y .

On obtient : $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. En posant $x = \lambda$, on a : $y = -\frac{a}{b}\lambda + \frac{c}{b}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{ \lambda; -\frac{a}{b}\lambda + \frac{c}{b}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Comme on a une infinité de valeurs de λ , le système admet une infinité de solutions.

- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors le système est impossible et $S = \emptyset$.

Exemples :

1.- Reprenons encore le premier exemple $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1(-1) = 5$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1)(-1) = 5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & (-1) \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - (1)(3) = -5$$

$\Delta \neq 0$, donc on a une solution unique : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1$

On retrouve l'ensemble des solutions $S = \{ (1 ; -1) \}$

2.- Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système : $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ -6x + 2y = 2 \end{cases}$.

On a $\Delta = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0$. Les deux équations sont équivalentes.

On va résoudre la première équation: $3x - y = -1$.

En posant $x = \lambda$, on a : $y = 3\lambda + 1$.

L'ensemble des solutions est $S = \{ \lambda ; 3\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{R} \}$.

3.- Soit à résoudre le système $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-4)(-1) = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - (0)(-1) = -2$$

$\Delta_x \neq 0$ donc on n'a aucune solution : $S = \emptyset$