Loi binomiale et loi de Poisson

1. Loi binomiale

1.1 Épreuves de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues possibles (appelées : succès, et échec).
On appelle suite de n épreuves de Bernoulli l'expérience qui consiste à répéter n fois une épreuve à deux issues possibles, les résultats de deux épreuves étant indépendants.
Une telle succession d'épreuves indépendantes est appelée schéma de Bernoulli.

Exemple

une boîte contient 6 jetons dont 5 noirs et 1 blanc. On tire un jeton de la boîte.
On déclare qu'il y a succès, noté S, si le jeton tiré est blanc ; sinon il y a échec, noté E.
Effectuons un deuxième tirage en remettant le premier jeton dans la boîte (on suppose que le résultat de la 2ème épreuve est indépendant du résultat de la 1ère épreuve).
Les événements : S1 : "avoir un succès au 1er tirage" et S2 : "avoir un succès au 2ème tirage" sont indépendants.
De même si on tire un 3ème jeton, le résultat du 3ème tirage est indépendant des résultats des deux tirages précédents.
On peut répéter n fois cette épreuve. Le résultat du n-ième tirage est indépendant des résultats des n-1 tirages précédents.

Dans l'exemple précédent, la probabilité, pour un tirage, d'obtenir un succès est $p=\frac{1}{6}$. Celle d'obtenir un échec est $q=\frac{5}{6}$.

Effectuons n tirages. Calculons la probabilité des événements suivants :
- A : "avoir n succès"
- B : "avoir exactement un succès"
- C : " avoir exactement k succès" ($0 \leq k \leq n$)

Calcul de p(A)

La probabilité d'obtenir un succès (1 blanc) pour un tirage est $\frac{1}{6}$. Les résultats des tirages étant indépendants, on a p(A) = $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Calcul de p(B)

L'événement B est réalisé si on obtient 1 succès et (n-1) échecs au cours des n tirages.

La probabilité d'avoir, dans l'ordre, 1 succès et (n-1) échecs est $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

La probabilité est la même si le succès a lieu au 2ème tirage, ou au 3ème, ... ou au n-ième tirage.

On a donc : p(B) = $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

L'événement C "avoir exactement k succès" est donc constitué de C_n^k éventualités ayant la même probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$. D'où p(C) = C_n^k . $\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$.

Propriétés

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli. On suppose que la probabilité d'un succès est p et celle d'un échec est q. (p + q = 1)

La probabilité p_k d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves est :

$$p_k = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} .$$

On dit que les probabilités p_0, p_i, ..., p_n forment une distribution binomiale.

Lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale, la probabilité pour que X prenne la valeur k est

$$p(X=k) = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} .$$

On démontre que :

L'espérance mathématique de X est : E (X) = np.

Sa variance est V (X) = npq.

2. Loi de Poisson

2.1 Introduction

La loi de Poisson est utilisée lorsqu'on étudie un phénomène rare dans certaines conditions.

Exemples typiques d'utilisation de la loi de Poisson :

X est le nombre de voitures qui passent à une visite technique par tranche de 15 min ;

X est le nombre de fautes de frappe par page de cours de maths (il s'agit là d'événements très rares).

2.2 Définition

Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note X→ P(λ), lorsque :

L'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de tous les entiers naturels : X(Ω) = IN.

Pour tout k ∈IN, P(X = k) = $e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

2.3 Théorème

Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors :

E(X) = λ ; V (X) = λ ; σ(X) = √ λ