Corrigé Problème Bacc série D 2022

Problème

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(-1)=e \\ f(x)=(x+1)\ln(x+1)+e^{-x} \quad \text{si } x>-1 \end{cases}$

On note par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1-a) *Continuité à droite en x_0 =-1*

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x+1)\ln(x+1)+e^{-x}$

$\lim_{x\to -1^+} (x+1)\ln(x+1)=0$ donc $\lim_{x\to -1^+} f(x)=e$.

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=e=f(-1)$ donc f est continue en -1.

b) $\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)\ln(x+1)+e^{-x}-e}{x+1}$

$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \ln(x+1)+\frac{e^{-x}-e}{x+1}$

$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1)=-\infty$

Pour $\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}-e}{x+1}$, posons X = x+1. On a si $x\to -1$, alors $X\to 0$

$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}-e}{x+1} = \lim_{X\to 0^+} \frac{e^{-X+1}-e}{X} = \lim_{X\to 0^+} e\frac{e^{-X}-1}{X}$

$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}-e}{x+1} = -e$

Ainsi $\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$

2) g est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=1+\ln(x+1)-e^{-x}$.

a) g est dérivable et $g'(x)=0+\frac{1}{x+1}+e^{-x}$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}+e^{-x}$$

g'(x) > 0 pour tout $x\in]-1;+\infty[$, donc g est strictement croissante.

b) g(0)=0, donc si x > 0, g(x) > 0, et si x <0, alors g(x) < 0.

3-a) $f(x)=(x+1)\ln(x+1)+e^{-x}$, donc $f'(x)=\ln(x+1)+(x+1).\frac{1}{x+1}-e^{-x}$

Ainsi $f'(x)=\ln(x+1)+1-e^{-x}=g(x)$

Limite en $+\infty$

$\lim_{x\to +\infty} (x+1)\ln(x+1)=+\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} e^{-x}=0$, donc $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Tableau de variation

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| e	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) Branche infinie

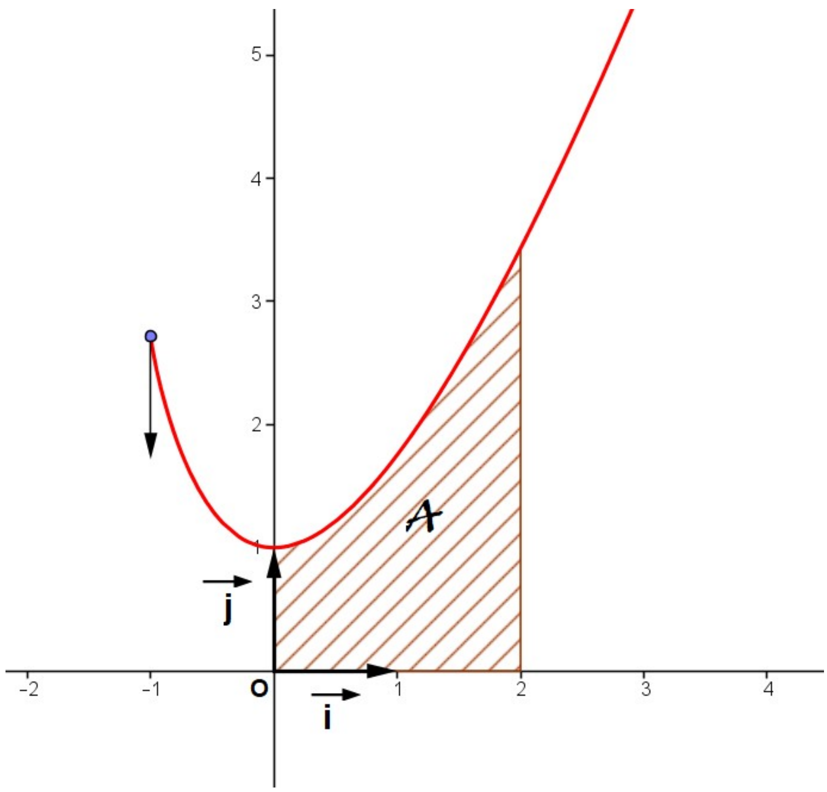
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\ln(x+1)+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\ln(x+1)+\frac{e^{-x}}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Et la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique (y'Oy).

b) Construction

$\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\infty$ donc on a une demi-tangente verticale en -1.



5) Soit $A=(\int_0^2 f(x)dx)u.a$

Considérons l'intégrale $I=\int_0^2 (x+1)\ln(x+1)dx$.

Posons u' = x+1 et v = ln (x+1).

On a $u=\frac{x^2}{2}+x$ et $v'=\frac{1}{x+1}$.

Donc $I=\int_0^2 (x+1)\ln(x+1)dx=[(\frac{x^2}{2}+x)\ln(x+1)]_0^2-\int_0^2 \frac{x^2+2x}{2(x+1)}dx$

$$\frac{x^2+2x}{2(x+1)}=\frac{x^2+x+x+1-1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(x+1)}$$

Donc $\int_0^2 \frac{x^2+2x}{2(x+1)}dx=\int_0^2 \frac{x}{2}dx+\int_0^2 \frac{1}{2}dx-\int_0^2 \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}dx$

$$\int_0^2 \frac{x^2+2x}{2(x+1)}dx=[\frac{x^2}{4}]_0^2+\frac{1}{2}[x]_0^2-\frac{1}{2}[\ln(x+1)]_0^2=2-\frac{1}{2}\ln 3$$

$$\int_0^2 e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^2=1-e^{-2}$$

Ainsi $\int_0^2 f(x)dx=2-\frac{1}{2}\ln 3+1-e^{-2}=3-e^{-2}-\frac{1}{2}\ln 3$

Alors $A=(\int_0^2 f(x)dx).4\,cm^2=15{,}24\,cm^2$

6) Soit (U_n) la suite définie par $U_n=\int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} e^{-x}dx$.

a) $U_n=\int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} e^{-x}dx=[-e^{-x}]_{\frac{-n}{2}}^{-\frac{n+1}{2}}=-e^{-\frac{n+1}{2}}+e^{-\frac{n}{2}}=e^{-\frac{n}{2}}[1-\frac{1}{\sqrt{e}}]$

$$U_n=e^{-\frac{n}{2}}[\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}]$$

b) $U_n=e^{-\frac{n}{2}}[\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}]$, donc $U_{n+1}=e^{-\frac{n+1}{2}}[\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}]$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{e^{-\frac{n+1}{2}}\left[\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\right]}{e^{-\frac{n}{2}}\left[\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\right]}=e^{-\frac{1}{2}}$$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $q=e^{-\frac{1}{2}}$. Son premier terme est $U_0=\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}$