Corrigé problème 2 Bacc série S 2022

Problème 2 (8 points)
Les deux parties sont indépendantes
Partie A

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(x)=x-2+e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x>0 \end{cases}$

On note par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1- *Continuité de f*

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x-2+e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 0^+} x-2=-2$

$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}=-\infty$ **, donc** $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0$,

alors $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x-2+e^{-\frac{1}{x}}=-2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-2=f(0)$, donc f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} \frac{x-2+e^{-\frac{1}{x}}+2}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} \frac{x+e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$

Posons $X=\frac{1}{x}$. On a $X\to+\infty$ si $x\to 0^+$

Ainsi $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{X\to+\infty} Xe^{-X}=0$

Alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$. Ainsi, f est dérivable en 0, et la courbe admet une (demi)tangente de pente 1 en 0 (à droite)

2. a) ***Calcul de f'(x)***

$f(x)=x-2+e^{-\frac{1}{x}}$ si $x>0$ donc $f'(x)=1-0+(\frac{1}{x^2})e^{-\frac{1}{x}}$

D'où $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

f '(x) > 0 quel que soit x >0, donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

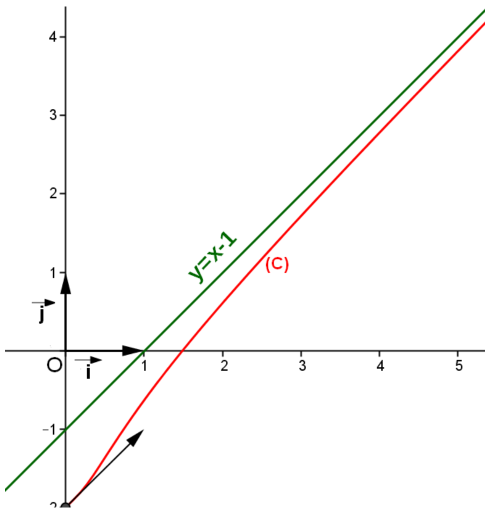
$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-2+e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$

Tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f(x)	-2 $\nearrow$ $+\infty$

3- $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}-1=0$ donc la droite d'équation **y = x-2** est une asymptote (oblique) à la courbe de f.

4- ***Courbe de f***



Partie B

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n=\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}dx$.

1- Soit $I=\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-4x^2}dx$

$$\frac{1}{1-4x^2}=\frac{1}{2(1+2x)}+\frac{1}{2(1-2x)}$$

Donc $I=\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2(1+2x)}+\frac{1}{2(1-2x)}dx=\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2(1+2x)}dx+\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2(1-2x)}dx$

Ainsi $I=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln(1+2x)]_0^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln(1-2x)]_0^{\frac{1}{4}}$

$$I=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})]-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}]$$

Finalement $I=\frac{1}{4}\ln 3$

2-Pour tout , $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=1+4x^2+(4x^2)^2+....+(4x^2)^n$.

Vérifions que $S_n=\frac{1}{1-4x^2}-\frac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}$

S_n est la somme des (n+1) premiers termes de la suite géométrique de raison $q=4x^2$ et de premier terme 1.

Donc $S_n=1.\frac{1-(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}$, d'où $S_n=\frac{1}{1-4x^2}-\frac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}$.

3-D'une part $\int_0^{\frac{1}{4}} S_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{4}}(1+4x^2+(4x^2)^2+....+(4x^2)^n)dx=[x+4\frac{x^3}{3}+4^2\frac{x^5}{5}+....+4^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}]_0^{\frac{1}{4}}$

$\int_0^{\frac{1}{4}} S_n(x)dx=\frac{1}{4}+4.\frac{(\frac{1}{4})^3}{3}+4^2\frac{(\frac{1}{4})^5}{5}+...+4^n\frac{(\frac{1}{4})^{2n+1}}{2n+1}$

D'autre part $S_n=\frac{1}{1-4x^2}-\frac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}$

donc $\int_0^{\frac{1}{4}} S_n(x)dx=I-I_n$

D'où $\frac{1}{4}+\frac{1}{3.4^2}+\frac{1}{5(4^3)}+...+\frac{1}{(2n+1)4^{n+1}}=\frac{1}{4}\ln 3-I_n$

4-a) $0\leq x\leq\frac{1}{4}$ donc $0\leq x^2\leq\frac{1}{16}$

$0\leq 4x^2\leq\frac{1}{4}$

$1\geq 1-4x^2\leq\frac{3}{4}$

$1\leq\frac{1}{1-4x^2}\leq\frac{4}{3}$

Donc $(4x^2)^{n+1}\leq\frac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}\leq\frac{4}{3}(4x^2)^{n+1}$,

d'où $\int_0^{\frac{1}{4}}(4x^2)^{n+1}dx\leq\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}dx\leq\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{4}{3}(4x^2)^{n+1}dx$

Ce qui donne après intégration : $\frac{1}{(n+2)4^{n+2}}\leq I_n\leq\frac{1}{3(n+2)4^{n+2}}$

b- $\frac{1}{(n+2)4^{n+2}}\leq I_n\leq\frac{1}{3(n+2)4^{n+2}}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+2)4^{n+2}}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3(n+2)4^{n+2}}=0$, donc

$\lim_{n\to+\infty} I_n=0$

Et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3.4^2}+\frac{1}{5(4^3)}+...+\frac{1}{(2n+1)4^{n+1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{4}\ln 3-I_n)=\frac{1}{4}\ln 3$