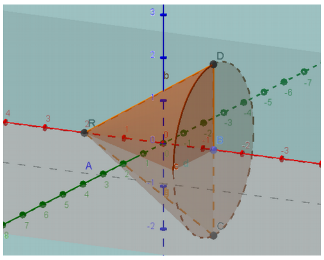
# Application de l'intégral au calcul de volume

## 1. Définition

### Solide de révolution

*Un solide de révolution* est un corps géométrique que l'on obtient en faisant tourner une surface plane autour d'une ligne appelée axe.
Exemple :
Un cône est obtenu en faisant tourner un triangle autour de son axe.



(voir activités géogebra cylindre de révolution 1 et cylindre de révolution 2)

Dans ce chapitre, on se limitera au cas de solide de révolution autour de l'axe des abscisses.

## 2. Calcul de volume

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{OI},\vec{OJ},\vec{OK})$ . ON considère un solide de révolution autour de l'axe des abscisses.

La section de ce solide par un plan d'abscisse x est un cercle de rayon r qui est dépend de x.

Donc, la surface de la section est $S(x)=\pi(r(x))^2$ .

On suppose que S est une fonction continue . Alors on a le théorème suivant

### Théorème

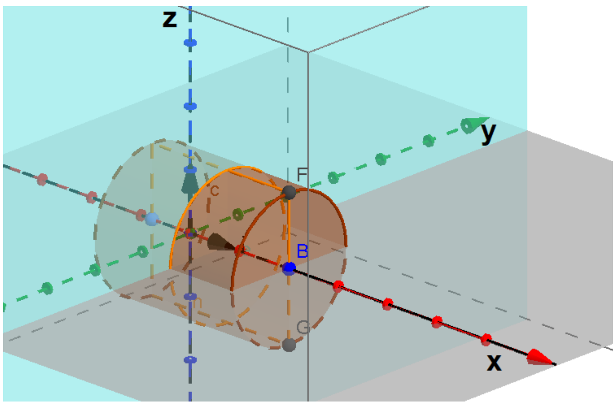
L'unité de volume étant le volume du parallélépipède rectangle formé par les vecteurs $\vec{OI},\vec{OJ},\vec{OK}$ , (1 unité de volume = $1u.v=\|\vec{OI}\|\|\vec{OJ}\|\|\vec{OK}\|$ x cm³), le volume V délimité par la surface latérale du solide, par les plans d'équation x = a et x = b est en u.v

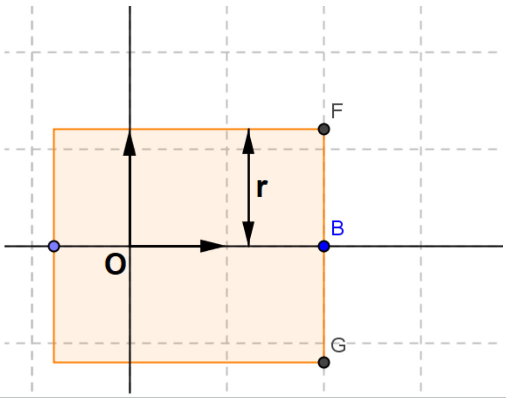
$V=\int_a^b S(x)dx$ où S est la surface de la section du volume par le plan d'abscisse x

## 3. Exemples

### 3.1 Volume d'un cylindre de révolution

On considère un cylindre de révolution autour de l'axe des abscisses et de rayon r.



La section de ce cylindre par un plan d'abscisse x est constante et égale au rayon r de la surface de base.

Donc le volume de ce cylindre est, en unité de volume,

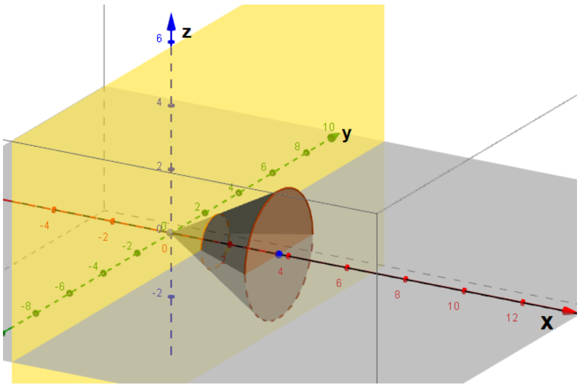
$$V=\int_a^b \pi r^2 dx=[\pi r^2 x]_a^b$$

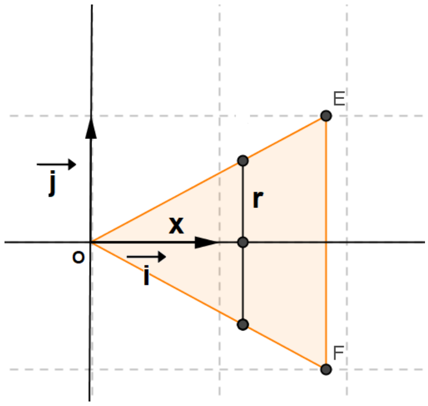
Ce qui donne $V=\pi r^2(b-a)$

On retrouve la formule donnant lle volume du cylindre de rayon r et de hauteur h $V=\pi r^2.h$

## 3.2 Volume d'un cône de révolution

On considère le cône de révolution autour de l'axe des abscisses, de hauteur h dont la surface de base a pour rayon R.




La section de ce cône par le plan d'abscisse x est un cercle de rayon r, fonction de x :

On a $\frac{R}{h}=\frac{r}{x}$ , d'où $r=x\frac{R}{h}$ .

La surface de la section plane est donc $\pi r^2=\pi\left(x.\frac{R}{h}\right)^2$ .

Le volume de ce cône est, en unité de volume,

$$V=\int_0^h \pi x^2\frac{R^2}{h^2}dx=[\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2\frac{x^3}{3}]_0^h$$

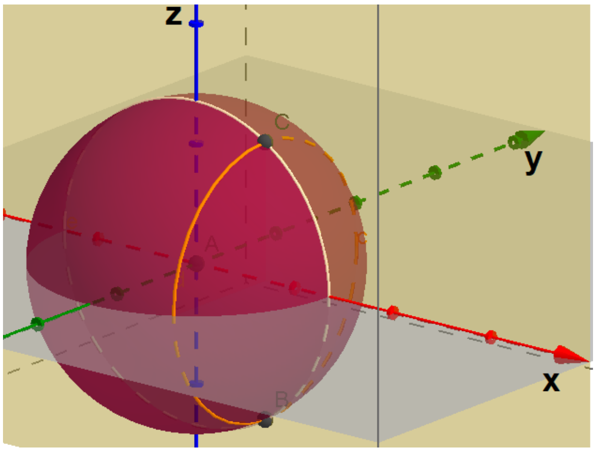
C qui donne $V=\pi\frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3}$ et en simplifiant :

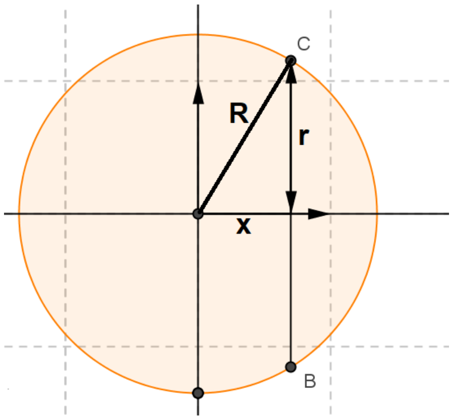
$$V=\frac{\pi R^2 h}{3}$$ .

On retrouve la formule donnant le volume d'un cône de hauteur h et dont le rayon de la surface de base est r : $V=\frac{S_{base}.h}{3}$

## 3.3 Volume d'un sphère

On considère le sphère de rayon R. On va prendre un repère dont l'origine est le centre du sphère.




La section de ce sphère par le plan d'abscisse x est un cercle de rayon r qui dépend de x.

On va calculer d'abord le volume du demi-sphère qui se trouve dans le demi-plan correspondant aux x positif.

Le triangle OPM est rectangle en P, donc, d'après le théorème de Pythagore, $R^2 = x^2 + r^2$ .

Ce qui donne $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ .

Le volume du demi-sphère est, en unité de volume,

$$V = \int_0^R \pi \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \int_0^R \pi \left(R^2 - x^2\right) dx$$

$$V = \left[\pi\left(R^2 . x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi\frac{R^3}{3}$$

Le volume du sphère est donc $V' = 2V = \frac{4}{3}\pi R^3$