Corrigé Problème I série C 2022

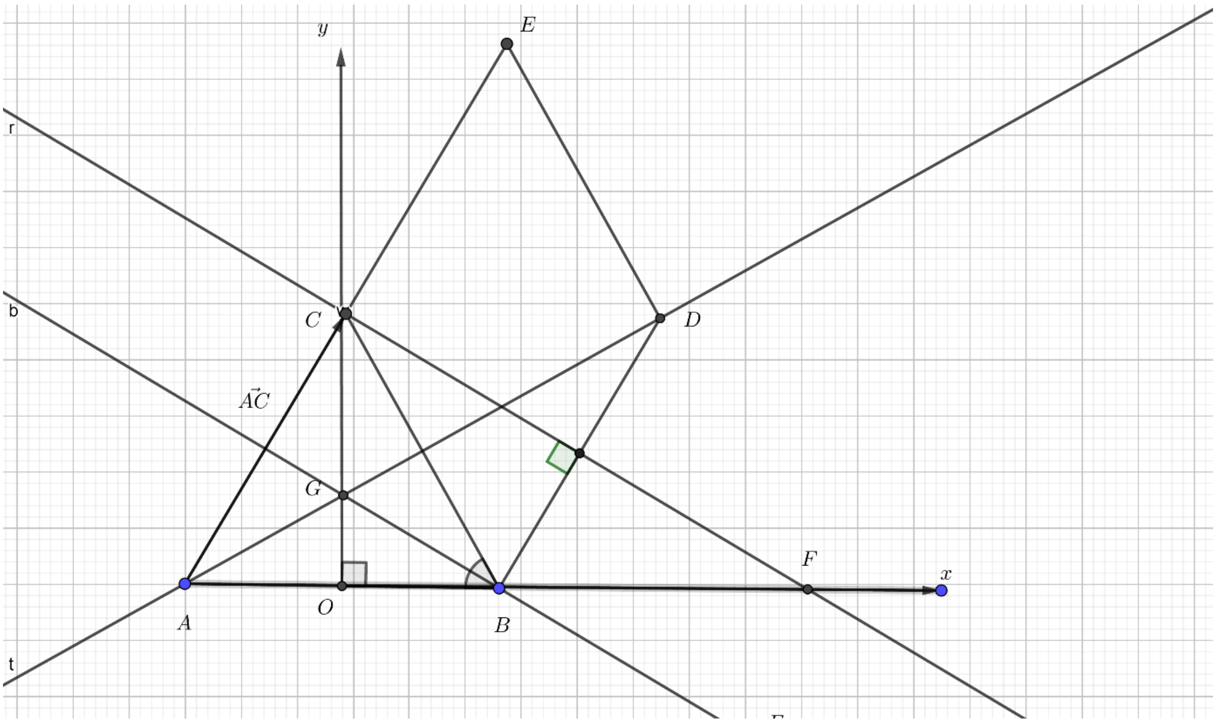
PROBLEME.I

ABC est un triangle équilatéral direct tel que $AB = 3cm$

- ✓ $G = isobarycentre\ A; B; C$
- ✓ $r_1 = R(A; \frac{\pi}{3})$;
- ✓ $r_2 = R(B; \frac{\pi}{3})$;
- ✓ $T = réciproque\ de\ r_2$; $t = t_{\overrightarrow{AC}}$;
- ✓ $S = SPD : \begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = E \end{cases}$
- ✓ On pose $f = r_1 \circ r_2$ et $g = t \circ T$

Partie A

1-Traçage de ABC et placement des points



2 .a) Nature de transformation $f = r_1 \circ r_2$

Avec $r_1 = R\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$; $r_2 = R\left(B; \frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)[2\pi] = 2\frac{\pi}{3}[2\pi] \neq 0[2\pi]$

Donc f est une rotation

b) Décomposition en deux réflexions

$$\begin{cases}(AG)\cap(AB)=\{A\}\\(AG)=r_{(A;\frac{\pi}{6})}(AB)\end{cases}\text{ donc } r_1=s_{(AG)}\circ s_{(AB)}$$

$$\begin{cases}(AB)\cap(BG)=\{B\}\\(AB)=r_{(B;\frac{\pi}{6})}(BG)\end{cases}\text{ donc } r_2=s_{(AB)}\circ s_{(BG)}$$

c)Eléments caractéristiques de f

On sait que $f=r_1\circ r_2=s_{(AG)}\circ s_{(AB)}\circ s_{(AB)}\circ s_{(BG)}$. Donc $f=r_1\circ r_2=s_{(AG)}\circ s_{(BG)}$

Or $(AG)\cap(BG)=\{G\}$ alors f est la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=2\frac{\pi}{3}$

3.a) La nature et les éléments caractéristique de T

$T=r_2^{-1}=R\left(B;\frac{\pi}{3}\right)^{-1}=R\left(B;-\frac{\pi}{3}\right)$. Donc T est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

b) Caractérisation de g

- $t=t_{\overrightarrow{AC}}$

avec $\begin{cases}(BG)//(CP)\\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BG}\\ (CF)=t_{\frac{1}{2}}(BG)\end{cases}$ alors $t=s_{(CF)}\circ s_{(BG)}$

- $T=R\left(B;-\frac{\pi}{3}\right)$

Avec $\begin{cases}(BG)\cap(AB)=\{B\}\\(BG)=R_{-\frac{\pi}{6}}(AB)\end{cases}$ alors $T=s_{(BG)}\circ s_{(AB)}$

- $g=t\circ T$, alors $g=s_{(CF)}\circ\underbrace{s_{(BG)}\circ s_{(BG)}}_{Id}\circ s_{(AB)}$, donc $g=s_{(CF)}\circ s_{(AB)}$. Or $(CF)\cap(AB)=\{F\}$.

Par suite g est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

4.Rapport et l'angle de S

S : similitude plane directe de rapport k et d'angle θ

$$\begin{cases}S(A)=A\\S(B)=E\end{cases}\text{ donc } k=\frac{AE}{AB}=\frac{2AC}{AB}=\frac{2AB}{AB}=2k=2\Rightarrow k=2 \text{ et } \theta=mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{3}$$

PARTIE B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $R=\left(O;\overrightarrow{OB};\vec{v}\right)$

1. Affixes respectives des points A,B ,C et E

$$z_A=-1\ ;\ z_B=1\ ;\ \tan\frac{\pi}{3}=\frac{OC}{OA}\Leftrightarrow OC=OA\times\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\Rightarrow z_C=i\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}\Leftrightarrow z_C-z_A=z_E-z_C\Leftrightarrow z_E=2z_C-z_A \text{ alors } z_E=1+2i\sqrt{3}$$

2. a)Expression complexe de chacune des transformations r_1 et r_2

$$r_1 = R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A) + z_A \Leftrightarrow r_1 : z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Et $r_2 = R_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_B) + z_B \Leftrightarrow r_2 : z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

b) Déduction de l'expression complexe de f

$$f = r_1 \circ r_2 : M(z) \xrightarrow{r_1} M_1(z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}) \xrightarrow{r_2} M'(z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z_1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2})$$

Soit $f : z' = \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3. a) Expression complexe de S

$S : z' = az + b$

$$\begin{cases} S(A) = A \Leftrightarrow z_A = az_A + b \\ S(B) = E \Leftrightarrow z_E = az_E + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_B} = 1 + i\sqrt{3} \\ b = z_A - az_A = i\sqrt{3} \end{cases}$$ Alors $S : z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + i\sqrt{3}$

Donc $S : z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + i\sqrt{3}$

- Rapport : $k = |a| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$;
- Angle : $\theta = \arg a = \arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$