Corrigé problème 2 Bacc série C 2022

PROBLEME II

Partie A :

Soit $\begin{cases} f(x) = 1 - x^2e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1° *Montrer que f continue en $x_0 = 0$:*

* Calcul $f(0) = 1 - 0^2e^0 = 1$.

* Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 - x^2e^x = 1 = f(0)$ alors f continue à gauche de $x_0 = 0$.

* Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x[\ln(x+1) - \ln x]} = 1 = f(0)$ alors f continue à droite de $x_0 = 0$.

Donc f continu en $x_0 = 0$.

2° *Etude la dérivabilité à gauche de $x_0 = 0$.*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - x^2e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2e^x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -xe^x = 0 \in \mathbb{R}$$

Alors f est dérivable à gauche de $x_0 = 0$.

3° *Montrons que f n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$.*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1}{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1}{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$.

4° *a) Calcul limite aux bornes de Df :*

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - x^2e^x$,

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Alors ($\mathcal{C}$) admet une asymptote horizontale d'équation y = 1 au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

Posons alors $X = \dfrac{1}{x}$,on a : $X \to 0^+$ si $x \to +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$

Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$$

Alors ($\mathcal{C}$) admet une asymptote horizontale d'équation y= e au voisinage de + ∞.

b) Calcul de la dérivée :

* $\underline{Si\ x \in -\infty, 0}$: $f'(x) = -(2xe^x + x^2e^x) = -(x^2+2x)e^x$

*- $\underline{Si\ x \in 0, +\infty}$: $f'(x) = \left[\ln(1+\frac{1}{x}) + x(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})\right] e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$f'(x) = \left[\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{x}{x+1} - 1\right] e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

c) Signe de $g(x)$ et $f'(x)$ *:*

Soit $x \in 0, +\infty$, alors

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2+x-x^2-2x-1+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{x}{x+1} - 1\right]$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{x}{x+1}\right] = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x$	‖ $-$	
$g(x)$	‖ ↘	0

g est décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, donc g(x)>0 pour tout x >0

Or $f'(x) = g(x)\,e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, donc f(x) > 0 pour tout x >0

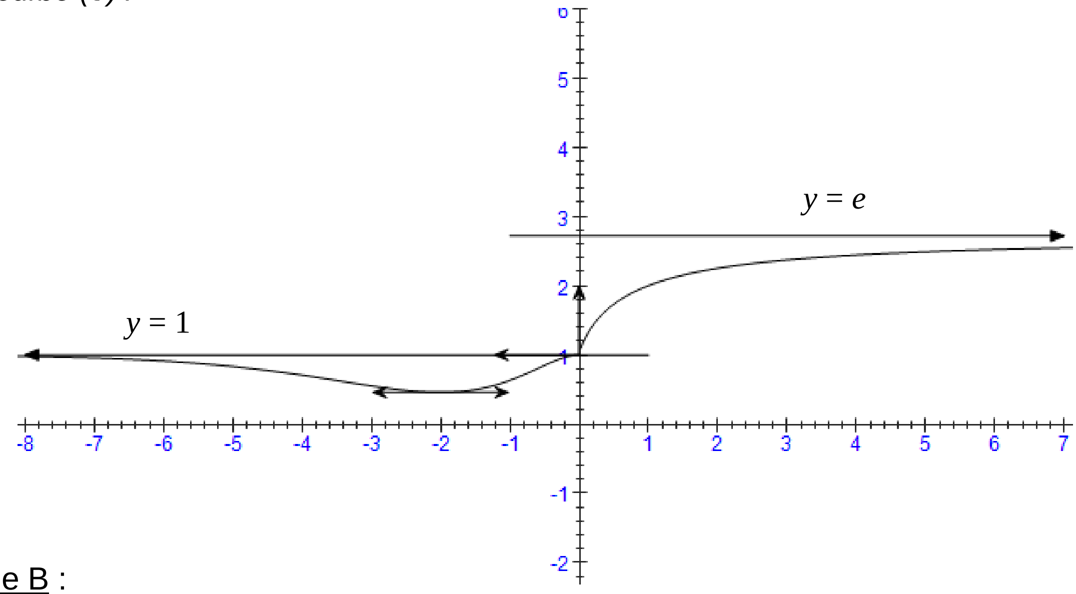
5° Tableau de variation de f .

Sur $-\infty;0$, $f'(x) = 0$ si et seulement si $-(x^2+2x)e^x = 0$

Donc si et seulement si x = -2.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	+	
f(x)	1	↘	$1-4e^{-2}$	↗	1	↗	e

6° *Courbe ($\mathcal{C}$) :*



Partie B :

Soit (U_n) une suite définie par $U_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ pour tout $n \in IN^*$ et

soit $\varphi_n(x) = \ln\ 1+(n+1)x\ - \frac{n+1}{n+2}\ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1° a. *Montrer que φ_n admet un minimum dont-on précisera la valeur :*

Calcul de $\varphi_n'(x)$

$$\varphi'_n(x) = \frac{n+1}{1+(n+1)x} - \frac{n+1}{(n+2)x} = \frac{(n+1)(n+2)x-(n+1)\ \ 1+(n+1)x}{1+(n+1)x\ \ (n+2)x}$$

$$\varphi'_n(x)=\frac{nx+x-n-1}{1+(n+1)x\ (n+2)x}=\frac{(n+1)x\ -(n+1)}{1+(n+1)x\ (n+2)x}$$

$\varphi'_n(x)=0$ si et seulement si $(n+1)x\ -(n+1)=0$

donc si et seulement si $x=1$

Tableau de variation de φ_n *:*

x	0		1		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi_n(x)$	‖	$\searrow$	$\ln(n+2)$	$\nearrow$	

Donc φ_n admet un minimum ln(n+2) en 1

b. *Déduisons- en que* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\},\ \left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]^{n+2}>x^{n+1}$ (1)

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$

D'après a) $\varphi_n(x)>\ln(n+2)$

$\varphi_n(x)>\ln(n+2)$ si et seulement si $\ln\ 1+(n+1)x\ -\frac{n+1}{n+2}\ln x>\ln(n+2)$

si et seulement si $\ln\ 1+(n+1)x\ -\ln(n+2)>\frac{n+1}{n+2}\ln x$

si et seulement si $\ln\left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]>\frac{n+1}{n+2}\ln x$

si et seulement si $(n+2)\ln\left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]>(n+1)\ln x$

si et seulement si $\ln\left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]^{(n+2)}>\ln x^{(n+1)}$

D'où $\left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]^{(n+2)}>x^{(n+1)}$

2° Sens de variation de (U_n) *:*

On pose $x=\frac{n}{n+1}$, $x\neq 0$ et $x\neq 1$.

D'après (1) on a : $\left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]^{(n+2)}>x^{(n+1)}$

Alors $$\left[\frac{1+(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n+2}\right]^{(n+2)}>\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)}$$

D'où $\left[\frac{1+n}{n+2}\right]^{(n+2)} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)}$

Ce qui donne , en prenant les inverses,

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+2)} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(n+1)}$$

ou $$\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^{(n+2)} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(n+1)}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+2)} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$$

ainsi $U_{n+1} < U_n$

Donc la suite (U_n) est une suite décroissante.

3° *a. Établissons l'inégalité* $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ *:*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in [n, n+1]$

On a $n \leq t \leq n+1$. Ce qui donne $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{n+1}$

En intégrant, on a $\int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dt$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \geq \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} 1.dt$$

Donc $$\int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \geq \frac{1}{n+1} \qquad (2)$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n \geq e$:

D'après (2) , $[\ln t]_n^{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$

d'où $\ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+1}$

b. *étude de la convergence de la suite* (U_n) *:*

D'après les questions précédentes (U_n) est une suite décroissante et minorée par *e*, donc elle est convergente.

4° *Calcul de* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} e^{(n+1)\,ln(1+\frac{1}{n})}$$

Posons $x = \frac{1}{n}$.

On a $x \to 0$ si $n \to +\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to 0} e^{(\frac{1}{x}+1)\ln(1+x)} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}+\ln(1+x)}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \ln(1+x) = 1 + 0 = 1$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = e$