Bacc S : Corrigé de l'exercice 1

I Arithmétique

1) Montrons que $9^{3n+1}+4^{6n+1}$ est divisible par 13

Utilisons les propriétés de la congruence qui s'énonce :

$a \equiv a_1$ (n) ; $b \equiv b_1$ (n) , alors $a^n \equiv (a_1)^n$(n) et $a + b \equiv a_1+b_1$(n) .

$9^{3n+1} = 9.(9^3)^n$. or $9^3 \equiv 1(13)$, donc.$(9^3)^n \equiv 1(13)$ et $9.(9^3)^n \equiv 9(13)$

Par le même raisonnement, $4^{6n+1} \equiv 4$ (13)

Alors ,$9^{3n+1}+4^{6n+1} \equiv 9 + 4$ (13) : c'est-à-dire $9^{3n+1}+4^{6n+1} \equiv 13$ (13)

Ainsi, $9^{3n+1}+4^{6n+1}$ est divisible par 13.

2) Résolution de l'équation

On a :

$\dot{x}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{x}^2$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
$3\,\dot{x}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{6}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$
$\dot{x}^2 + 3\,\dot{x}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$

L'ensemble des solutions est $S = \{ \dot{1} , \dot{3} \}$.

3) Résolution de (E)

Utilisons l'algorithme d'Euclide.

43 = 37x1+ 6 = 37 + 6

37 = 6 x 6 +1

Alors, 1 = 37 – 6 x 6 = 37 – 6 x (43-37) ; c'est-à-dire 1 = 7 x 37 – 6x43.

La solution particulière est (7 ; 6).

On a 37x-43y = 37x7 – 43x6 => 37 (x – 7) = 43 (y – 6) => $\begin{cases} x - 7 = 43k \\ y - 6 = 37k \end{cases}$

La solution de (E) est : $\begin{cases} x = 7 + 43k \\ y = 6 + 37k \end{cases}$

II Calcul matriciel

1) Calcul de A^2 et A^3 .

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A^3 $=A^2A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

2) Vérification

$4A + A^2 - A^3 = 4I_3$ si $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) A inversible

D'après la relation, $4A + A^2 - A^3 = 4I_3$, on a $(4A + A^2 - A^3)A^{-1} = 4I_3\, A^{-1} = 4A^{-1}$ car $I_3\, A^{-1} = A^{-1}$

C'est-à-dire $4A^{-1} = 4A\, A^{-1} + A^2\, A^{-1} - A^3\, A^{-1}$

Alors $4A^{-1} = 4I_3 + A - A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

D'où $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\frac{1}{4} & -2.\frac{1}{4} & -2\,\frac{1}{4} \\ -2\,\frac{1}{4} & 2\,\frac{1}{4} & -2\,\frac{1}{4} \\ -2\,\frac{1}{4} & -2\,\frac{1}{4} & 2\,\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{4}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} =$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$