

Applications affines et linéaires

1. Application

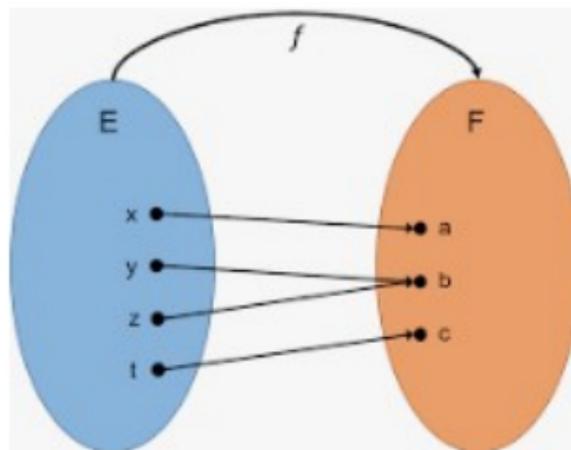
Soient E et F deux ensembles.

1.1 Définition

Une application f de E dans F est une relation entre les éléments de E et ceux de F telle que chaque élément x de E est en relation avec un et un seul élément y de F.

Si x est en relation avec y par l'application f on écrit $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x et x un antécédent de y . E est l'ensemble de départ (ou source), F l'ensemble d'arrivée de f (ou but).

Exemple



Ici $f(x) = a$, $f(y) = b$...

1.1 Application bijective

On dit que f est bijective si chaque élément de F est l'image d'un élément de E et un seul

2. Application affine ou fonction affine

Une bibliothécaire a fixé aux élèves une adhésion annuelle de 1000ar par élève avec 200ar par livre emprunté. Écrire la correspondance entre le livre emprunté et la somme à payer.

Nombre de livre x	0	1	2	3	4
Prix à payer $y = f(x)$	$1000ar + 0 \times 200ar$	$1000ar + 1 \times 200ar$	$1000 + 2 \times 200 ar$	$1000 + 3 \times 200ar$	$1000 + 4 \times 200ar$

La relation entre x et y est $y = 200x + 1000$

2.1 Définition

Une fonction affine est une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

Exemple

Soit f l'application affine définie par $f(x) = 2x - 1$

- (1) Calculer l'image 3 par f .
- (2) Calculer l'antécédent de -5 par f
- (3) Représenter graphiquement f

Réponse

(1) Pour calculer l'image de 3, on remplace x par 3. $f(3) = 2 \times 3 - 1$

$$f(3) = 5$$

(2) Pour calculer l'antécédent de -5, on remplace $f(x)$ par -5 et on cherche x

$$2x - 1 = -5 \text{ donne } x = -2$$

2.2 Détermination d'une application affine

Exemple 1

Trouver l'expression de l'application affine tels que $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$

Réponse

Posons $f(x) = ax + b$.

$$f(-2) = 4 \text{ alors } a(-2) + b = 4$$

$$f(3) = 1, \text{ alors } 3a + b = 1$$

On est amené à résoudre le système $\begin{cases} -2a + b = 4 \\ 3a + b = 1 \end{cases}$. On a trois méthodes pour résoudre ce système. Après

$$\text{calcul, on trouve } a = \frac{-2}{5} \text{ et } b = \frac{14}{5}.$$

Exemple 2

La droite représentant une application affine f passe par le point $A(4; -2)$ et a pour terme constant 3. Déterminer l'expression de f

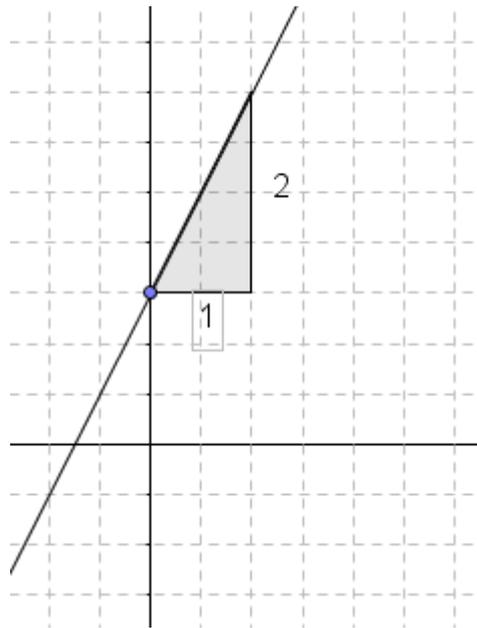
Réponse

$$f(x) = ax + b \text{ mais } b = 3, f(x) = ax + 3.$$

$$\text{Elle passe par } A(4; -2), \text{ alors } f(4) = -2, \text{ d'où } 4a + 3 = -2. \text{ On a } a = \frac{-5}{4}. f(x) = \frac{-5}{4}x + 3$$

2.3 Représentation graphique

La représentation graphique d'une application affine définie par $f(x) = ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$. a est la pente ou le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine



3. Fonction linéaire ou application linéaire

Une fonction linéaire a pour expression $f(x) = ax$. Sa courbe passe par l'origine.