Multiples d'un entier

1. Introduction

Les membres d'une association ont décidé que lors de chaque réunion, celui qui arrive en premier verse une certaine somme S dans la caisse de l'association, le deuxième arrivé verse le double, le troisième le triple.. et ainsi de suite.

Ainsi le deuxième arrivé verse 2 x V, le troisième 3 x V, le quatrième, 4 x V...

Les sommes versées par ceux qui n'arrivent pas en premier sont des multiples de V… : ce sont le double, le triple, le quadruple…..

2. Définition

Un entier naturel a est un multiple d'un entier b si, et seulement si, il existe un entier q tel que l'on ait

a = b x q .

Exemples :

6 est un multiple de 3 : 6 = 3 x 2. 6 est donc aussi un multiple de 2

32 est un multiple de 4 : 32 = 4 x 8. 32 est aussi un multiple de 8, de 16 et de 32.

.

3. Ensemble des multiples d'un entier naturel

Quand on multiplie un nombre entier b par un entier, on obtient un multiple de b. Les multiples d'un entier b sont de la forme 2 x b, 3 x b, 4 x b…

Les multiples de 1 sont : 1, 2, 3, 4, 5, …..(1 = 1x1, 2 = 2 x 1, 3 = 3 x 1, 4 = 4 x 1...)

Les multiples de 2 sont : 2, 4, 6, 8, 10, …(2 = 2 x 1, 4= 2 x 4, 6 = 6 x 2, 8 = 4 x 2...)

Les multiples de 3 sont 3, 6, 9, 12, 15, ...(3 = 3 x 1, 6 = 3 x 2, 9 = 3 x 3...)

L'ensemble des multiples d'un entier b est noté $b\mathbb{N}$.

Ainsi $2\mathbb{N}=\{2;4;6;8;10...\}$

$3\mathbb{N}=\{3;6;9;12;15,...\}$

$4\mathbb{N}=\{4;8;12;16;20...\}$

Et plus généralement $b\mathbb{N}=\{b;2\times b;3\times b;4\times b;5\times b...\}$

$b\mathbb{N}$ comprend un nombre infini d'éléments.

Nous avons alors $a\in b\mathbb{N}$ s'il existe un entier q vérifiant a = q x b

Exemples

18 = 3 x 6, donc $18\in 3\mathbb{N}$. Mais on a aussi $18\in 6\mathbb{N}$

36 = 4 x 9 donc $36\in 4\mathbb{N}$. Mais on a aussi $36\in 9\mathbb{N}$: 36 est à la fois un multiple de 6 et un multiple de 9 : on dit que 36 est un multiple commun à 4 et à 9.

Dans $3\mathbb{N}=\{3;6;9;12;15,...\}$, 9 et 12 se suivent : il n'y a pas de multiple de 3 qui se trouvent entre 9 et 12. On dit que 9 et 12 sont des multiples consécutifs de 3.

De même $4\mathbb{N}=\{4;8;12;16;20...\}$, 16 et 20 sont des multiples consécutifs de 4.

Définition

Soient n et n+1 des entiers naturels consécutifs et b un entier naturel.

Les entiers b x n et b x (n+1) sont des multiples consécutifs de b.

4. Somme et différence de deux multiples d'un entier

Les entiers 28 et 63. Ce sont des multiples de 7. En effet 28 = 7 x 4, et 63 = 7 x 9.
On a 63 – 28 = 35 et 63 +28 = 91.
On peut observer que 35 = 7 x 5 et 91 = 7 x 13 , donc la somme de 28 et de 63 et la différence de 63 et 28 sont aussi des multiples de 7.
63 + 28 = (7 x 9) + (7 x 4) = 7 x (9 + 4) = 7 x 13

63 – 28 = (7 x 9) - (7 x 4) = 7 x (9 – 4) = 7 x 5

Cas général

Soient m et n deux multiples d'un entier naturel b.

Ils existent deux entiers p et q tels que m = p x b et n = q x b. Supposons que $p \geq q$

m + n = (p x b) + (q x b) = (p + q) x b

m - n = (p x b) - (q x b) = (p - q) x b

p + q et p-q sont des entiers naturel, donc m + n et m – n sont des multiples de n.

La somme et la différence de deux multiples d'un entier naturel sont des multiples de cet entier naturel.

5. Multiple d'un multiple

2 x 3 = 6 ; donc 6 est un multiple de 3.

Comme 7 x 6 = 42 , 42 est un multiple de 6.

Mais 42 = 3 x 14, donc 42 est aussi un multiple de 3.

Cas général

Considérons un entier a et un entier m multiple de a : donc il existe un entier p tel que m = axp.

Si n est multiple de m il existe un entier q tel que n = m x q. On a alors n = (axp)xq

Ce qui donne n = axpxq ou a = ax(pxq).

Comme pxq est un entier , n est un multiple de a.

Si n est un multiple de m, et m un multiple de a , alors n est un multiple de a