Corrigé Exercice Bacc série C 2020

Exercice

ARITHMÉTIQUE

I- 1. *Table d'addition dans* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

Table de multiplication dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

2. Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le système d'équations $\begin{cases} \bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1} & (1) \\ \bar{2}x+\bar{5}y=\bar{3} & (2) \end{cases}$.

Multiplions (1) par 3 : on a $\bar{4}(\bar{3}x+\bar{2}y)=\bar{4}$ ou $\bar{5}x+\bar{1}y=\bar{4}$ ce qui donne $y=\bar{4}-\bar{5}x$.
L'équation (2) s'écrit alors $\bar{2}x+\bar{5}(\bar{4}-\bar{5}x)=\bar{3}$

$\bar{2}x+\bar{6}-(\bar{4}x)=\bar{3}$

$\bar{2}x=\bar{3}$

Ce qui donne, d'après la table de multiplication , $x=\bar{5}$

Alors $y=\bar{4}-\bar{5}.\bar{5}=\bar{4}-\bar{4}$

Ainsi $y=\bar{0}$

et $S=\{(\bar{5},\bar{0})\}$.

II. Montrons que pour tout entier naturel n, $10^{6n}+10^{3n}-2$ est divisible par 111.

On a $10^3\equiv 1 \ [111]$ donc $10^{3n}\equiv 1 \ [111]$

$10^6 \equiv 1 \quad [111]$ donc $10^{6n} \equiv 1 \quad [111]$.

Alors $10^{6n}+10^{3n}-2 \equiv 0 \; [111]$. Ainsi $10^{6n}+10^{3n}-2$ est divisible par 111.

PROBABILITÉS

$P_1=P_3=P_5$, $P_2=P_4=P_6$ et $P_2=2P_1$.

1. On lance une fois ce dé.

a) $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=1$ Ce qui donne $9P_1=1$, ou $P_1=\frac{1}{9}$.

On a alors $P_1=P_3=P_5=\frac{1}{9}$, $P_2=P_4=P_6=\frac{2}{9}$.

b) Soit P la probabilité d'obtenir un nombre impair : $P=P_1+P_3+P_5=3.\frac{1}{9}$

D'où $P=\frac{1}{3}$.

2. a) On lance le dé n fois de suite et d'une manière indépendante, où n est un entier naturel non nul .

a) E_n : « obtenir au moins un nombre pair »

L'événement contraire à E_n est l'événement $\overline{E_n}$ « n'obtenir aucun nombre pair », dont la probabilité est $P(\overline{E_n})=(\frac{1}{3})^n$

D'où $P(E_n)=1-P(\overline{E_n})=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{E_n})=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-(\frac{1}{3})^n)=1$

c) $P(E_n)=1-P(\overline{E_n})=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ équivaut à $1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0}=\frac{2186}{2187}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0}=1-\frac{2186}{2187}=\frac{1}{2187}$

$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0}=n_0\ln\frac{1}{3}=-\ln 2187$

d'où $n_0=\frac{\ln 2187}{\ln 3}$

et $n_0=7$