Corrigé problème série OSE 2022

Problème (9 points)

Soit $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$,

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$

2. Soit g la fonction définie par g(x) = -x +1 -2 lnx

a) Variations de g

$D_g=]0;+\infty[$

$g'(x)=-1-\frac{2}{x}$

Pour tout x > 0, g'x) < 0, donc g est strictement décroissante.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} -x+1-2\ln x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} -x+1-2\ln x=-\infty$

x	0	$+\infty$
g'(x)	$-$	
g	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b) g(1)= -1+1-2.ln1=0

c) La fonction g est continue et strictement décroissante, donc

- si x > 1, alors g(x) < g(1). Et comme g(1) = 0, g(x) < 0 pour tout x > 1
- si x < 1, alors g(x) > g(1). Et comme g(1) = 0, g(x) > 0 pour tout x < 1

3) $f'(x)=\frac{-2\ln x-x+1}{x^3}$

4) Tableau de variation

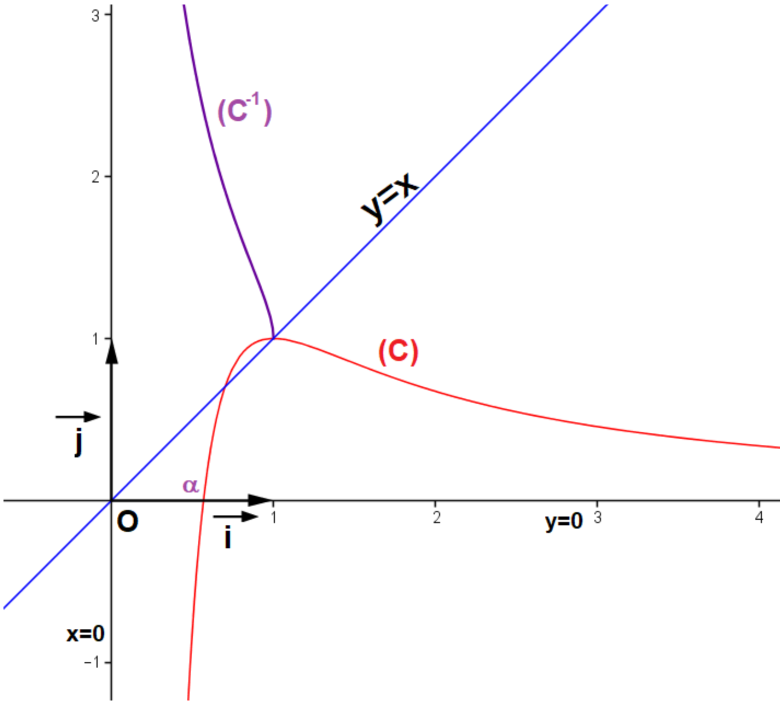
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	1	↘	0

5) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle] 0,5 ; 0,6 [.

$\lim_{x \to 0,5} f(x) = f(0,5) = -0,77$ $\lim_{x \to 0,6} f(x) = f(0,6) = 0,25$. Elles sont de signes contraires.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une réel unique α appartenant à l'intervalle] 0,5 ; 0,6 [tel que f (α)=0.

6)



7) h est la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

a) h est continue et strictement décroissante sur $I = [1; +\infty[$. Donc c'est une bijection de I sur $J =]0; 1]$.

b) Voir courbe

8) Posons u = ln x et $v' = \frac{1}{x^2}$. Donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = -\frac{1}{x}$

On a alors $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[\ln x . (-\frac{1}{x}) - \int_1^2 -\frac{1}{x^2} dx \right]_1^2$

d'où $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^2$

Ainsi $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

9) $A = (\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}) . 2 \times 2 \, cm^2$

A= 0,15 x 4 = 6 cm²

10) (U_n) est la suite définie par $U_n = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

a) $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx = [\frac{(\ln e^{n+1})^2}{2} - \frac{(\ln e^n)^2}{2}]_1^2 = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - n^2] = \frac{1}{2}(2n+1)$

b) $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}(2n+1) = +\infty$