MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Service du Baccalauréat

MESUPRES

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

SESSION 2022

C

| | | | |
|---|---|---|---|
| Série | : Scientifique | Épreuve de : | MATHÉMATIQUES |
| Option | : C | Durée | : 4 heures |
| Code matière | : 009 | Coefficient : | 5 |

**NB : - L'utilisation d'une machine calculatrice scientifique non programmable est autorisée.**
**- L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.**

## EXERCICE (04 points)

### Partie A

Un appareil de jeu est constitué de 5 cases numérotées de 1 à 5 et d'une seule boule.
L'épreuve consiste à faire tomber la boule dans l'une de ces 5 cases

1. On effectue une épreuve et on suppose qu'il existe un réel positif p tel que $P_k = (k + 1)\,p$ où $P_k$ est la probabilité pour que la boule soit tombée dans la case numéro k avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   a) Déterminer le réel p (0,75pt)
   b) En déduire que $p_1 = \frac{1}{10}$ et $p_3 = \frac{1}{5}$ (0,25pt)
2. On répète 3 fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve de la question 1)
   a) Calculer la probabilité pour que la boule soit tombée une fois et une seule dans la case numéro 1 (0,5 pt)
   b) Calculer la probabilité pour que la boule soit tombée au moins 2 fois dans la case numéro 3 (0,5pt)

**NB : donner les résultats sous forme de fraction rationnelle irréductible**

### Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = 5^{4n+2} - 11^{2n+2}$

1. a) En utilisant une démonstration par récurrence sur n, montrer que $A_n$ est divisible par 4 (0,5 pt)
   b) A l'aide de congruence arithmétique, montrer que $A_n$ est divisible par 3 (0,5 pt)
2. a) A l'aide du théorème de Gauss, montrer que si un entier relatif N est divisible simultanément par deux entiers relatifs p et q premiers entre eux alors N est divisible par le produit pq. (0,75pt)
   b) Montrer que $A_n$ est divisible par 12 (0,25pt)

## PROBLEME I (07 points)

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on considère le triangle équilatéral direct ABC tel que AB = 3 cm, on désigne par G l'isobarycentre des 3 points A, B, C. Soient BDEC un parallélogramme direct tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$ . Soient O le milieu du segment [AB] et F le point d'intersection de la médiatrice de [BD] avec la droite (AB).
Soient :

$r_1$ la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$

$r_2$ la rotation de centre B d'angle $\frac{\pi}{3}$

T la transformation réciproque de $r_2$

t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

S la similitude plane directe de centre A qui transforme le point B en E

On pose $f = r_1 \circ r_2$ et $g = t \circ T$

**Partie A**

1. Tracer le triangle ABC et placer les points O, G, D, E et F (0,5pt)
2. a) Quelle est la nature de la transformation f ? (0,25pt)

   b) Décomposer $r_1$ et $r_2$ en produit de deux symétries orthogonales convenablement choisies **(0,5x2 pt)**

   c) Donner les éléments caractéristiques de f **(0,5pt)**
3. a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de T **(0,5pt)**

   b) Caractériser g à l'aide de décomposition de la translation t et de la transformation T en produit de deux symétries orthogonales, dont l'un des axes est la droite (BG) (0,75pt)
4. Déterminer le rapport et l'angle de S (0,5pt)

**Partie B**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OB}, \vec{V})$.

1. Déterminer les affixes respectives des points A, B, C, E. (0,5pt)
2. a) Donner l'expression complexe de chacune des transformations $r_1$ et $r_2$ (0,5x2pts)

   b) En déduire l'expression complexe de f (0,5pt)
3. a) En utilisant les hypothèses S(A) = A et S (B) = E, déterminer l'expression complexe de S (0,5pt)

   b) Retrouver le rapport et l'angle de S à l'aide de son expression complexe (0,5pt)

**PROBLEME II** (09 points)

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x^2e^x \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1. Montrer que $f$ est continue en $x_0 = 0$ (0,5 pt)
2. Etudier la dérivabilité à gauche en $x_0 = 0$ de la fonction $f$ (0,25pt)
3. Montrer que $f$ n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$ (0,5pt)
4. Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition (pour la limite en $+\infty$, on pourra poser $X = \frac{1}{x}$) (0,25+0,5pt)

   a) Déterminer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ où $f'$ est la fonction dérivée de $f$ (0,5pt)

   b) Pour tout $x > 0$ on pose $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1$.

A l'aide de l'étude de variation de la fonction g, trouver le signe de $g(x)$ puis de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (0,75pt)

5. Dresser le tableau de variation de $f$ (0,75pt)
6. Tracer $(\mathscr{C})$ en précisant les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 0$ (1 pt)

**Partie B**

Soit $(U_n)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Soit $\varphi_n$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi_n(x) = \ln[1 + (n+1)x] - \frac{n+1}{n+2}\ln x \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. a) Montrer que $\varphi_n$ admet un minimum dont on déterminera sa valeur en fonction de $n$ (0,75pt)

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad \left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]^{n+2} > x^{n+1}$ (1) (1pt)

2. A l'aide de l'inégalité (1) determiner le sens de variation de la suite $(U_n)$ (0,75 pt)

(on pourra poser $x = \frac{n}{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ )

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'inégalité $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt$ et montrer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n \geq e$ (0,25 pt + 0,5 pt)

b) Déduire des résultats des questions précédentes, l'étude de convergence de la suite $(U_n)$ (0,25pt)

4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ (0,5pt)