PGCD - PPCM – NOMBRES PREMIERS – Exercices corrigés

Exercice 1

1- Etablir que : quel que soit (a, b, q) $\in$ Z, pgcd(a, b) = pgcd (b, a-bq).
2- Montrer que : pour tout entier relatif n, pgcd($5n^3$-n, n+2) = pgcd(n+2, 38)
3- Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que (n+2) divise ($5n^3$-n).
4- Quelles sont les valeurs possibles de pgcd($5n^3$-n, n+2).
Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que pgcd($5n^3$-n, n+2)= 19.
On supposera que n est différent de 0 et de –2.

1) Tout diviseur commun à a et b est un diviseur commun à b et a-bq.
Réciproquement, tout diviseur commun à b et a-bq est un diviseur commun à b et (a-bq) + bq.
2) On prend a = $5n^3$-n, b = n+2 et q= $5n^2 - 10n + 19$.
3) D'après 2), il faut et il suffit que n+2 divise 38. D'où les valeurs de n : -40, -21, -4, -3, 17, 36.
4) Les valeurs possibles de pgcd($5n^3$-n, n+2) sont les diviseurs de 38, c'est-à-dire 1, 2, 19 et 38.
Le pgcd($5n^3$-n, n+2) = 19 si et seulement si n+2 est un multiple impair de 19, c'est-à-dire un entier de la forme 38p+19 (p$\in$ Z). Ainsi n = 38p+17.

Exercice 2

n étant un entier relatif quelconque, on pose a = n-1 et b = n^2-3n+6.
1- a) Montrer que pgcd(a, b) = pgcd(a, 4)
b) Déterminer, suivant les valeurs de n, le pgcd(a , b).
2- Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ *est-il un entier relatif ?*
On *suppose* n différent de 1.

1- a) pour tout entier naturel n $n^2-3n+6 = (n-1)(n-2)+4$. Donc les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à a et à 4.
b) Les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4.
Si $n \equiv 0[4]$, alors pgcd(a, 4) = 1. Si $n \equiv 1[4]$, alors pgcd(a, 4) = 4.
Si $n \equiv 2[4]$, alors pgcd(a, 4) = 1. Si $n \equiv 3[4]$, alors pgcd(a, 4) = 2.
2- Le nombre rationnel $\frac{b}{a}$ est un entier relatif si et seulement si le pgcd(a, b) est | a |. En distinguant les trois mêmes cas ci-dessus, on trouve que les valeurs possibles de n sont : -3, -1, 0, 2, 3 et 5.

Exercice 3

Soit un nombre entier n (n > 1).
1- Montrer que n et 3n + 1 sont deux nombres premiers entre eux.
2- Déterminer n, nombre premier, pour que la fraction $\frac{455n}{3n+1}$ *soit égale à un nombre entier.*

1° n et 3n + 1 sont premiers entre eux.
Les deux nombres n et 3n + 1 sont premiers entre eux si, et seulement si, leur P.G.C.D. est égal à 1. Soit d le P.G.C.D. des nombres n et 3n + 1.
Si d divise n, il divise aussi 3n. Divisant les deux nombres 3n et 3n + l,

il divise leur différence : 1. On a donc nécessairement et d= 1. Ce qui montre que les deux nombres sont premiers.

2° Valeurs de n pour lesquelles $\frac{455n}{3n+1}$ est égale à un entier.

La fraction considérée F est égale à un nombre entier si 3n + 1 divise 455 n.
n et 3n + 1 étant premiers entre eux, 3n+ 1 doit diviser 455. Ce nombre se décompose en facteurs premiers de la façon suivante: 455 = 5x 7 x 13.
3n + 1 doit être égal à l'un des nombres: 5, 7, 13, 35, 65, 91, 455. De plus, n doit être entier. Seuls les nombres 7, 13 et 91 sont donc à conserver; on obtient ainsi pour n les valeurs 2, 4 et 30.
L'énoncé imposant à n d'être premier, la seule solution acceptable est n = 2.
on a alors: F = 130.

Exercice 4

Trouvez tous les couples (a, b) d'entiers naturels ($a \leq b$) qui vérifient m+10d=142, où m = PPCM (a ; b) et d = PGCD (a ; b).

On a m.d = ab.
Soient a’ et b’ tels que a = d.a’ et b = d.b’ alors a' et b' sont premiers entre eux et m= a'.b'.d.
D'où d (a'.b' + 10) = 142.
La décomposition de 142 en facteurs premier est 142 = 2 . 71.
Comme a'b' + 10 > 11 on a a'b' + 10 = 71 ou a'b' + 10 = 142.

1er cas : d = 1 et a'b' + 10 = 142.
On a a'b' = 132 = 2².3.11. Donc (a, b) = (a', b'),
les solutions sont (1, 32) ; (3, 44) ; (4, 3) ; (11, 12)

2ème cas : d = 2 et a'b' + 10 = 71
On a a'b' = 61. D'où (a', b') = (1, 61) ε (a, b) = (2, 122).

Exercice 5

Déterminer les entiers x et y tels que :

$$\begin{cases} m = 210.d \\ y - x = d \end{cases} \quad (1)$$

Soient x’ et y’ tels que x = d.x’ et y = d.y’. On a m.d = x.y, ce qui implique
m = x'.y'.d
Le système d'équations (1) équivaut à

$$\begin{cases} x'y' = 210 \\ y' - x' = 1 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} y' = x'+1 \\ x'(x'+1) = 210 \end{cases}$$

x' et x'+1 doivent être des diviseurs consécutifs de 210.
On a 210 = 2.3.5.7. Les diviseurs de 210 sont 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.
Les valeurs possibles de x' sont 1, 2, 5, 6 ou 14. Seule x' = 14 convient, d'où y' = 15 et d est indéterminé.
Les solutions sont de la forme (14d ; 15d), d $\in$IN*.

Exercice 6

Un nombre entier N s'écrit dans le système décimal : N = $\overline{ababab}$ où a et b sont des chiffres compris entre 0 et 9 (inclus). On considère l'ensemble E de ces nombres N.

1° Combien l'ensemble E contient-il d'éléments ?
2° Montrer que tous les éléments de E admettent plusieurs diviseurs communs. Donner la liste de ces diviseurs communs.

1° Nombre d'éléments appartenant à E.
Le choix de deux chiffres, les deux premiers par exemple, définit le nombre N. Le nombre d'éléments de E est donc égal au nombre de couples ordonnés (a, b) que l'on peut former quand a et b prennent leurs valeurs entre 0 et 9.
Il y a 10 façons de choisir le nombre a, et 10 façons de choisir b.
Il y a donc 10 x 10 = 100 éléments dans l'ensemble E.

2° Diviseurs communs à tous les éléments de E.
Un nombre N quelconque peut s'écrire : $N = a(10^5 + 10^3 + 10) + b(10^4 + 10^2 + 1)$
ou : $N = 10a(10^4 + 10^2 + 1) + b(10^4 + 10^2 + 1)$
soit encore : $N = (10a + b)(10^4 + 10^2 + 1) = (l0a + b)\ 10\ 101$.
Tous les nombres N sont donc divisibles par 10 101.
Ce diviseur commun se décompose en facteurs premiers : 10 101= 3 x 7 x 13 x 37.
Tous les nombres N admettent donc comme diviseurs communs les nombres :

3, 7, 13, 37 une part ;
les produits deux à deux de ces nombres : 21, 39, 91,111, 259, 481.
leurs produits trois à trois : 273, 777, 1 443, 3 367
et leur produit : 3 x 7 x 13 x 37 = 10 101.

Outre le nombre l, il y a 15 diviseurs communs à tous les nombres N.
Les nombres cherchés sont donc a = 32 760 et b = 9 828 1