THEOREME DE GAUSS – IDENTITE DE BEZOUT – Exercices corrigés

Exercice 1 :

Résolutions des équations ax + by = 1 ou ax - by = 1 avec a et b premiers entre eux.

***Méthode** : Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux, x et y étant deux entiers relatifs inconnus.*
Pour résoudre l'équation ax + by = 1 (ou ax - by = 1).
- Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0 ; y_0) solution de l'équation.
Lorsqu'il n'existe pas de solution évidente, recourir à l'algorithme d'Euclide.
- Utiliser l'équation ax + by = 1 (E) et l'égalité $ax_0 + by_0 = 1$ pour obtenir l'équation $a (x - x_0) = -b (y - y_0)$, équivalente à l'équation (E).
- Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer x et y.
On applique la même méthode dans le cas ax - by = 1.

1 - Résoudre l'équation 4 x - 5y = 1 (E).
2 - Résoudre l'équation 19x - 33y = 1 (E).

1 – Résolution de l'équation 4 x - 5y = 1 (E).

On vérifie que $x_0 = -1$ et $y_0 = -1$ sont solutions de (E)

L'équation 4 x - 5y = 1 (E) et 4 (-1) - 5 (-1) = 1 sont équivalentes à 4(x+1) = 5(y+1)
4 et 5 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss 4 divise y+1 et 5 divise x+1. D'où x + 1 = 5k et y + 1 = 4k où $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples (x ; y) tels que :
x = 5k - 1 et y = 4k - 1 où k est un entier relatif.

2 - Résolution de l'équation 19x - 33y = 1 (E).
L'équation (E) n'a pas de solution évidente.

<u>Méthode 1</u> : Utilisons l'algorithme d'Euclide.

33 = 19 . 1 + 14 (1)
19 = 14 . 1 + 5 (2)
14 = 5 . 2 + 4 (3)
5 = 4 . 1 + 1 (4)

De (4) on déduit : 5 - 4 . 1 = 1. Or, d'après (3), 4 = 14 - 5 . 2
D'où 5 - (14 - 5 .2) .1 = 1 soit encore 5 . 3 - 14 = 1.

La relation (2) permet d'exprimer 5 en fonction de 14 et de 19, et par suite 1 s'exprime en fonction de 14 et de 19.

5 = 19 - 14 . 1
(19 - 14 . 1) . 3 - 14 = 1
19 . 3 - 14 . 4 = 1

Or 14 = 33 - 19 . 1, d'où 19 .3 - (33 - 19) . 4 = 1
19 . 7 - 33 . 4 = 1.

Les équations 19 x - 33 y = 1 et 19 . 7 - 33 . 4 = 1 entraînent :
19 (x - 7) = 33 (y - 4) (E'). Réciproquement (E') entraîne (E).
L'ensemble des solutions de (E) est égal à l'ensemble des solutions de (E').

D'après le théorème de Gauss, comme 9 et 33 sont premiers entre eux, 19 divise (y-4) et 33 divise (x - 7). Il existe donc k $\in$ Z tel que y - 4 = 19k et x - 7 = 33k.
D'où y = 19k + 4 et x = 19k + 7.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples (33k + 7 ; 19k + 4) où k$\in$Z.

<u>Méthode 2</u> : Utilisation de l'algorithme d'Euclide

q		1	1	2	1	4	
	a=33	b=19	14	5	4	1	
r	14	5	4	1	0		
	1	0	1	-1	3	-4	-19
	0	1	-1	2	-5	7	-33

Exercice 2 : *Résoudre dans Z x Z l'équation 6x -13 y = 5.*

Le couple (3 ; 1) est une solution évidente.

Les équations 6.3 - 13.1 = 5 et 6x -13 y = 5 donnent 6(x-3) = 13 (y-1).
6 et 13 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Gauss :
x - 3 = 13k et y - 1 = 6k avec k $\in$ Z.

Les solutions sont x = 13k + 3 et y = 6k +1 avec k $\in$ Z.

Exercice 3 : *Résoudre dans Z x Z l'équation 17 x - 15 y = 3   (1).*

On a 17 x = 3(1 + 5y)
3 et 17 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss 3 divise x.
Posons $x'=\frac{x}{3}$.
(1) devient 17 x' - 5 y = 1
x' = -2 et y = -7 est une solution évidente. Alors 17. (-2) - 5.(-7) = 1 et 17 . x' - 5. y =1
d'où 17 (x' +2) = 5 (y + 7)

D'après le théorème de Gauss : x' +2 = 5k et y + 7 = 17 k

D'où les solutions x = 15 k - 6   et y = 17 k- 7.

Exercice 4 : Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numération de base n (n entier naturel supérieur ou égal à 6). $a=\overline{2310}$, $b=\overline{252}$ *.*
On désigne par d le pgcd (a, b).
1- Démontrer que (2n +1) divise a et b et que d = 2(2n+1) ou d = 2n+1 suivant que n est pair ou impair.
2- On prend n = 6 ; résoudre dans Z2 l'équation : ax + by = -26.

1- Par définition même, $a = 2n^3 + 3n^2+n$ et $b = 2n^2 + 5n +2$.

On vérifie que a = n (n+1) (2n+1) et b =(n+2) (2n+1). La divisibilité de a et de b par 2n + 1 est évidente.

La recherche de pgcd(a, b) se ramène à celle de pgcd [n(n+1), n+2]. Or n+1 est premier avec n et avec n+2, et le pgcd(n, n+2) est 2 ou 1 suivant que n est pair ou impair.

2- Pour n = 6, a = 546 =21 x 26 et b = 104 = 4 x 26.
Puisque n est pair, d= 2 (2n+1) = 26.
L'équation ax + by = -26 équivaut à : 21x + 4y = -1. Comme 21 et 4 sont premier entre eux, les solutions existent.

Le couple (-1 , 5) est une solution évidente. Les solutions sont donc : x = -1+4k et y = 5 - 21k (k∈Z).

Exercice 5 : n étant un entier naturel non nul, on pose a = 11n + 3 ; b = 13n − 1.
1- Démontrer que tout diviseur de a et de b est un diviseur de 50.
2- Résoudre pour x∈ IN et y∈ IN*, l'équation : 50 x − 13 y = 3.*
En déduire les valeurs de n pour lesquelles pgcd(a, b) = 50
3- Pour quelles valeurs de n le pgcd(a, b) = 25 ?

1- Tout diviseur commun à a et à b divise 13a − 11b = 50.

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide, on vérifie que le couple (x , y) = (6 , 27) est solution de 50 x − 13 y = 3.
D'où , 50 (x-6) = 11 (y −27).
Comme 50 et 11 sont premier entre eux, il découle du théorème de Gauss que :
x = 11k +6 et y = 50k + 27, où k ∈ IN.
Soit d = pgcd (a, b). D'après la question 1), d est un diviseur de 50.
Pour que d = 50, il faut et il suffit qu'il existe un couple (a' , b') d'entiers naturels non nuls tel que a=50a' et b=50b'. Ainsi a = 11n + 3 = 50 a', ce qui s'écrit 50 a' − 11n = 3. D'où n = 50 k + 27, où k ∈ IN.
Dans ces conditions a = 50 (11k + 6) et b= 50 (13k + 7).
Comme 13 (11k + 6) − 11 (13k + 7) = 1, on vérifie que a' et b' sont premiers entre eux.

3- Pour que d = 25, il est nécessaire que a et b ne soient pas tous deux pairs ; cela revient à dire que n est pair.
Soit n' ∈ IN*, alors $2n'-1 \equiv n'-1\,[25]$.
Pour que 25 divise b, il faut que n' = 1 + 25 n', où n' ∈ IN*.
Dans ces conditions, a = 25 (1 + 22n').
Les nombres a et b ainsi déterminés, étant impairs et divisibles par 25, conviennent.

Exercice : 6

Il s'agit de résoudre dans Z le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\ (12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : 19u + 12v = 1.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ *est une solution de (S).*

2. a. Soit n_0 *une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à* $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \ (19) \\ n \equiv n_0 \ (12) \end{cases}$ *équivaut à* $n \equiv n_0 \ (12 \times 19)$.

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation 19u + 12v = 1 et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par 228 = 12× 19. Quel est le reste r de cette division ?

Soit le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13 + 19k \\ n \equiv 6 + 12k' \end{cases}$.

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple (*u* ; *v*) d'entiers relatifs tel que : 19*u* + 12*v* = 1.

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (*S*) : il faut mettre N sous la forme $N \equiv 13 + 19k$.

Or $12v = 1 - 19u$ donc $N = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 + 19 \times (-7u)$.

De même $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13 \times 12v + 6(1 - 12v) = 6 + 12 \times 7v$.

2. a. Si n_0 est une solution de (*S*), on a $\begin{cases} n_0 = 13 + 19k_0 \\ n_0 = 6 + 12k'_0 \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0 (19) \\ n \equiv n_0 (12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n - n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n - n_0$, ce qui équivaut à $n \equiv n_0 (12 \times 19)$.

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5) + 12(8) = 1$;

on peut donc prendre *u* = −5 dans $N = 13 + 19 \times (-7u)$, ce qui donne $N = 678$;

de même on prend *v* = 8 et $N = 6 + 12 \times (7v)$, ce qui redonne bien $N = 678$.

b. $n \equiv n_0 (12 \times 19) \equiv 678(12 \times 19) \equiv 678(228) \equiv 222(228)$.