Exercices corrigés d'arithmétique

Exercice 1

Soit la fraction $\frac{2n+17}{n+1}$, où n est un nombre entier. Quelle doit être la forme générale de l'entier n pour que les deux termes de la fraction soient:
a) divisibles par 3 ?
b) divisibles par 5 ?
c) divisibles par 15 ?
Quelles doivent être les valeurs de l'entier n pour que la fraction soit un nombre entier ?

Solution.
Etude de la diversité des 2 termes de la fraction.
Pour faciliter le raisonnement, il est bon d'écrire la fraction sous la forme:

$$F = \frac{2(n+1)+15}{n+1} = 2 + \frac{15}{n+1}$$

où apparaît la seule quantité (n + 1).
Le nombre 15 est divisible par 3, 5 et 15. Par conséquent les deux termes de la fraction seront divisibles par 3, 5 et 15 si :

a) $n + 1 = 3k$ soit $n = 3k - 1$ $(k > 0)$
b) $n + 1 = 5k$ soit $n = 5k - 1$ $(k > 0)$
c) $n + 1 = 15k$ soit $n = 15k - 1$ $(k > 0)$

Valeurs de n pour lesquelles la fraction est égale à un nombre entier.
Sur la forme donnée précédemment à la fraction, il apparaît que les nombres n répondant à la question sont tels que (n + 1) divise 15. Les valeurs possibles pour n sont donc :
$n+l = 1 \Rightarrow n = 0$ et $F= 17$
$n+l = 3 \Rightarrow n = 2$ et $F= 7$
$n+l = 5 \Rightarrow n = 4$ et $F= 5$
$n+1 = 15 \Rightarrow n = 14$ et $F= 3$

Exercice 2

Soit un nombre entier n (n > 1).
1° Montrer que n et 3n + 1 sont deux nombres premiers entre eux.
2° Déterminer n, nombre premier, pour que la fraction $\frac{455n}{3n+1}$ soit égale à un nombre entier.

Solution.
1° n et 3n + 1 sont premiers entre eux.
Les deux nombres n et 3n + 1 sont premiers entre eux si, et seulement si, leur P.G.C.D. est égal à 1. Soit d le P.G.C.D. des nombres n et 3n + 1.
Si d divise n, il divise aussi 3n. Divisant les deux nombres 3n et 3n + l, il divise leur différence : 1. On a donc nécessairement et d= 1. Ce qui montre que les deux nombres sont premiers.

2° Valeurs de n pour lesquelles $\frac{455n}{3n+1}$ est égale à un entier.
La fraction considérée F est égale à un nombre entier si 3n + 1 divise 455 n.
n et 3n + 1 étant premiers entre eux, 3n+ 1 doit diviser 455. Ce nombre se décompose en facteurs premiers de la façon suivante: 455 = 5x 7 x 13.
3n + 1 doit être égal à l'un des nombres: 5, 7, 13, 35, 65, 91, 455. De plus, n doit être entier. Seuls les nombres 7, 13 et 91 sont donc à conserver; on obtient ainsi pour n les valeurs 2, 4 et 30.
L'énoncé imposant à n d'être premier, la seule solution acceptable est n = 2.
on a alors: F = 130.

Exercice 3

On suppose que n prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.

Trouver les valeurs de n telles que la fraction $F = \dfrac{3n^2 + 4n}{n-2}$ soit égale à un entier naturel.

Solution.

Dans ce genre d'exercice, extrêmement classique, la méthode de résolution est pratiquement toujours la même:
Il suffit de décomposer F en éléments simples, de façon à faire apparaître une partie entière et une partie fractionnaire, plus simple que F. La fin du raisonnement s'effectue sur cette partie fractionnaire.
Dans ce cas, la fraction F peut s'écrire :

$$F = \frac{3n^2 + 4n}{n-2} = \frac{3n^2 - 6n + 10n}{n-2} = \frac{3n(n-2) + 10n}{n-2}$$

$$F = \frac{3n(n-2) + 10(n-2) + 20}{n-2} = 3n + 10 + \frac{20}{n-2}$$

Remarque. On peut obtenir le même résultat en appliquant les méthodes traditionnelles de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

La fraction F, écrite sous cette dernière forme, est égale à un nombre entier si $\dfrac{20}{n-2}$ est un nom entier, c'est-à-dire si (n–2) divise 20.

On peut donc avoir:
$n - 2 = 1 \Rightarrow n = 3$ et $F = 39$
$n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$ et $F = 32$
$n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$ et $F = 33$
$n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7$ et $F = 35$
$n - 2 = 10 \Rightarrow n = 12$ et $F = 48$
$n - 2 = 20 \Rightarrow n = 22$ et $F = 77$
Il y a donc 6 valeurs de n qui répondent à la question.

Exercice 4

Les nombres a, b, c sont des nombres entiers appartenant à l'ensemble {0, 1,2,3, 4}. On représente par abc le nombre $5^2a + 5b + c$.

1° Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 4 si, et seulement si, a + b + c est divisible par 4.

2° Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 6 si, et seulement si, a - b + c est divisible par 6.

Remarque. Pour résoudre ces deux questions, le lecteur pourra s'inspirer de la méthode de démonstration des critères de divisibilité par 9 et par 11 dans le système décimal.

Solution.

1°Divisibilité par 4.

Le nombre abc peut s'écrire : $\overline{abc} = 25a + 5b + c$ ou $\overline{abc} = (24a + 4b) + (a + b + c)$
or 24a + 4b est toujours divisible par 4.

$\overline{abc}$ est donc divisible par 4 si, et seulement si, (a + b + c) est divisible par 4.

2° Divisibilité par 6.

D'une façon analogue, écrivons : $\overline{abc} = (24a + 6b) + (a - b + c)$

24a + 6b est congru à zéro modulo 6, et par conséquent $\overline{abc}$ est divisible par 6 si, et seulement si, (a - b + c) est divisible par 6.

Exercice 5

Soit le nombre $\overline{34x5y}$, dont x est le chiffre des centaines et y le chiffre des unités. Indiquer toutes les façons possibles de choisir les chiffres x et y pour que ce nombre soit divisible par 36.

Solution

Pour qu'un nombre soit divisible par 36, il faut et il suffit qu'il soit divisible par 4 et par 9.

La divisibilité par 4 du nombre $\overline{34x5y}$ exige que le nombre $\overline{5y}$ soit lui-même divisible par 4, c'est-à-dire que y = 2 ou y = 6. Les nombres cherchés sont donc soit de la forme $\overline{34x52}$, soit de la forme $\overline{34x56}$.

- Nombre de la forme $\overline{34x52}$.

Un tel nombre est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9, c'est-à-dire si :
x + 14 = 9k   k > 0, entier.
La seule valeur possible de k est k = 2, qui conduit à x = 4. Le nombre 34452 est donc divisible par 36.

- Nombre de la forme 34x56.

De la même façon, 34x56 est divisible par 9 si x + 18 = 9k
k = 2 conduit à x = 0, donc au nombre 34056.
k = 3 conduit à x = 9, donc au nombre 34956.

Il existe donc trois nombres répondant à la question : 34 452, 34 056 et 34 956.

Exercice 6

Les nombres dix et onze du système décimal sont représentés respectivement par α et β.

Montrer, sans passer par l'intermédiaire du système décimal, que le nombre qui s'écrit $\overline{\alpha 0408\beta}$ dans le système à base douze est divisible par onze.
Écrire ce nombre dans le système à base dix.

Solution.

Exprimons le nombre d'unités simples égal au nombre $\overline{\alpha 0408\beta}$, en remarquant que la base du système duodécimal est égale à β + 1 :

$$N = \alpha(\beta+1)^5 + 4(\beta+1)^3 + 8(\beta+1) + \beta.$$

En développant cette expression, et en regroupant les termes en de β tous les degrés, on peut écrire :

$$N = \beta(a\beta^4 + b\beta^3 + c\beta^2 + d\beta + e) + \alpha + 12$$

ou : $N = k.\beta + \alpha + 12$

De plus, en remarquant que $\alpha + 1 = \beta = 11$, on a : $\alpha + 12 = \alpha + 1 + 11 = 2\beta$.

D'où $N = k'.\beta$.

Ainsi, N est divisible par β , c'est-à-dire par onze.

N s'exprime dans la base 10 par : N = 10 x 12^5+ 4 x 12^3+ 8 x 12 + 11,
Soit N = 2 495 339 1

Exercice 7

Un nombre entier N s'écrit dans le système décimal : N = $\overline{ababab}$ où a et b sont des chiffres compris entre 0 et 9 (inclus). On considère l'ensemble E de ces nombres N.
1° Combien l'ensemble E contient-il d'éléments ?
2° Montrer que tous les éléments de E admettent plusieurs diviseurs communs. Donner la liste de ces diviseurs communs.

Solution.

1° Nombre d'éléments appartenant à E.
Le choix de deux chiffres, les deux premiers par exemple, définit le nombre N. Le nombre d'éléments de E est donc égal au nombre de couples ordonnés (a, b) que l'on peut former quand a et b prennent leurs valeurs entre 0 et 9.
Il y a 10 façons de choisir le nombre a, et 10 façons de choisir b.
Il y a donc 10 x 10 = 100 éléments dans l'ensemble E.

2° Diviseurs communs à tous les éléments de E.
Un nombre Nquelconque peut s'écrire:
$N = a (10^5 + 10^3 + 10) + b(10^4 + 10^2 + 1)$
ou : $N = 10a(10^4 + 10^2 + 1) + b(10^4+ 10^2+ 1)$
soit encore : $N = (10a + b)(10^4 + 10^2 + 1) = (l0a + b)\ 10\,101$.
Tous les nombres N sont donc divisibles par 10 101.
Ce diviseur commun se décompose en facteurs premiers : 10 101= 3 x 7 x 13 x 37.
Tous les nombres N admettent donc comme diviseurs communs les nombres :

3, 7, 13, 37 une part ;
les produits deux à deux de ces nombres : 21, 39, 91,111, 259, 481.
leurs produits trois à trois : 273, 777, 1 443, 3 367
et leur produit : 3 x 7 x 13 x 37 = 10 101.

Outre le nombre 1, il y a 15 diviseurs communs à tous les nombres N.