

NOMBRES PREMIERS

1. Définition

Soit a un élément de \mathbb{Z} .

a est premier si et seulement s'il n'admet d'autre diviseur que 1, -1, a et $-a$.

2. Propriétés

- Si p est premier, alors $-p$ est aussi un nombre premier.
- Tout entier a non premier admet au moins un diviseur b tel que $1 < b < |a|$.
- Un nombre non premier admet au moins un diviseur différent de 1 dont le carré lui est inférieur.

(Soit a un entier non premier : il existe un entier d tel que $d^2 \leq a$:
si $a = dd'$, d' est aussi diviseur de a autre que 1 et a .

Supposons que $d \leq d'$, on a $d^2 \leq dd'$ d'où $d^2 \leq a$

L'ensemble des nombres premiers est infini.

3. Recherche des nombres premiers : Crible d'Eratosthène

Soit a un entier naturel supérieur à 1.

On écrit tous les entiers inférieurs à a et parmi ces entiers on barre tous ceux qui ne sont pas premiers en procédant de la façon suivante :

On barre 0 et 1 qui ne sont pas premiers.

On laisse 2 qui est premier, mais on barre tous ses multiples

3 n'est pas barré. On le laisse mais on barre tous ses multiples ... et ainsi de suite.

Ex: Nombres premiers inférieurs à 30

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Les nombres premiers inférieurs à 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

4. Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Théorème : Un nombre premier qui divise un produit de facteurs divise au moins l'un d'eux.

Corollaire : Un nombre premier qui divise une puissance d'un nombre divise aussi ce nombre

Théorème : Un nombre non premier est décomposable en produit de facteurs premiers, et cette décomposition est unique.

Ex : Soit à décomposer 2772 en produit de facteurs premiers

2772	2
1386	2
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

$$2772 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$$

Théorème

Le PGCD de deux ou plusieurs nombres s'obtient en faisant le produit de tous les facteurs premiers communs aux nombres considérés, chacun étant affecté du plus faible exposant avec lequel il figure dans les diverses décompositions.

Théorème

Le PPCM de deux ou plusieurs nombres s'obtient en faisant le produit de tous les facteurs premiers contenus dans l'un au moins des nombres considérés, chacun étant affecté du plus fort exposant avec lequel il figure dans les diverses décompositions.

Méthode pratique :

Pour déterminer le PGCD de deux entiers naturels a et b, on peut :

- utiliser l'algorithme d'Euclide. (le dernier reste non nul est le PGCD)
- décomposer a et b en facteurs premiers. Le PGCD est le produit des facteurs communs aux deux décompositions, chaque facteur premier commun étant affecté du plus petit des exposants.

Pour déterminer le PPCM de deux entiers naturels a et b, on peut :

- décomposer a et b en facteurs premiers. Le PPCM de a et b est le produit de tous les facteurs figurant dans au moins une des deux décompositions, chaque facteur premier étant affecté du plus grand exposants des deux décompositions.
- déterminer le PGCD de a et b et utiliser l'égalité $\text{PGCD}(a, b) \cdot \text{PPCM}(a, b) = a \cdot b$.

Exemples :

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad 1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \quad 9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

$$\text{PGCD}(1260; 1350; 9000) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

$$\text{PPCM}(1260; 1350; 9000) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 189000$$

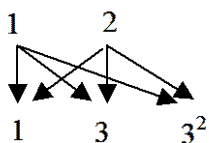
5. Condition de divisibilité

Soit n et p deux entiers supérieurs à 1. Pour que p soit un diviseur de n , il faut et il suffit que tous les facteurs de la décomposition de p figurent dans n avec des exposants au plus égaux.

6. Recherche des diviseurs d'un nombre a

Exemple : cherchons tous les diviseurs de 18.

On a $18 = 2 \cdot 3^2$



Les diviseurs de 18 sont 1.1 ; 1.2 ; 1.3 ; 1.3² ; 2.3 ; 2.3².

Exemple : Trouver les diviseurs de 60.

Nombre de diviseurs de a

Soit la décomposition en facteurs premiers de a : $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, on montre que le nombre de diviseurs de a est $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$.