Similitude plane : Fiche

Comment déterminer la similitude directe f définie par son centre Ω, un point A, et son image A' ?

Méthode géométrique

- Déterminer le rapport $k=\frac{\Omega A'}{\Omega A}$ et l'angle $\theta=(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'})$ de la similitude à partir de la construction géométrique.

Exemples d'application

- **Exemple 1**

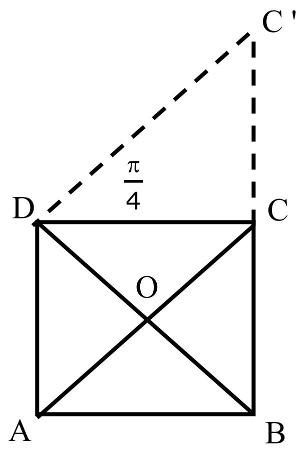
  ABCD est un carré de sens direct et de centre O avec $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$.

  a- Déterminer la similitude directe S de centre D qui transforme O en C.
  b- Quelle est l'image du point A ?
  c- Construire l'image du point C.

Réponses non détaillées :

a- Eléments caractéristiques de la similitude directe S

On utilise la construction pour calculer les distances DO et DC, puis l'angle $(\overrightarrow{DO}\ \overrightarrow{DC})$.
On rappelle que la longueur de la diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$



On pose AB = a

S est la similitude directe de rapport $k=\frac{DC}{DO}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$, et d'angle $\theta=(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC})=\frac{\pi}{4}$.

Θ est l'angle entre le droites orientées (DO) et (DC).

b- Image A' du point A.

On commence par placer l'axe (DA') à partir de $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DA'})=\frac{\pi}{4}$, puis le point A' , et voir si A' est confondu avec l'un des point de la figure.

On a S(A) = A' alors :

. $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DA'})=\frac{\pi}{4}$, le point A' appartient à la droite (DO)

. et $DA'=\sqrt{2}\,DA$.

Or $DB=\sqrt{2}\,DA$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=\frac{\pi}{4}$, d'où S(A) = A' = B.

c - Construction de l'image du point C.

Soit C' = S(C), on a $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DC'})=\frac{\pi}{4}$ et $DC'=\sqrt{2}\,DC$.

- **Exemple 2**
  ABC est un triangle rectangle en A avec BC=2AB
  Caractériser la similitude directe f de centre B qui transforme A en C.
  Construire l'image de C par f.

- **Exemple 3**
  ABC est un triangle équilatéral direct. I le milieu de [AB].
  Caractériser la similitude directe s de centre A et telle que s(C)=I.
  Construire l'image de B par s.

Exercices proposés

- **Exercice 1 :**

  ABC est un triangle rectangle en C et isocèle avec $(\vec{AB},\vec{AC})=\frac{\pi}{4}$.

  On considère la similitude directe de centre A, qui transforme B en C.
  a) Déterminer son angle et son rapport.
  b) Construire l'image de C par cette similitude.

- **Exercice 2 :**
  ABC est un triangle isocèle direct et rectangle en C.
  Caractériser la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.
  Construire l'image de C par S.

- **Exercice 3 :**

  ABCD est un rectangle vérifiant $(\vec{AB},\vec{AD})=-\frac{\pi}{2}$.

  S est la similitude de centre A, telle que S (D) = C.

a) Déterminer son angle et son rapport.
b) Construire l'image d'un rectangle ABCD par S.

- **Exercice 4 :**

ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$. [AH] est une hauteur.

On considère la similitude de centre H qui transforme A en B.
Déterminer son rapport, son angle et l'image du point C.

- **Exercice 5 :**

ABC est un triangle équilatéral direct, I le milieu de [AB].
Caractériser la similitude S de centre A telle que S(C) = I.
Construire l'image du point B.

- **Exercice 6 :**

../QuickPlace/accesmad/PageLibraryC12574A3002C8AFC.nsf/h_Index/B521D0F3C726ED16C12577FC00313102/

ABCD est un carré tel que $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$ et D est le milieu de [AE] et de [IC].

1. On considère la similitude directe S_1 de centre I qui transforme A en D. Déterminer son angle, son rapport et l'image du point C.
2. On considère la similitude directe S_2 de centre I qui transforme D en A. Déterminer son angle, son rapport et l'image du point E.
3. Construire l'image B_1 de B par S_1 et l'image B_2 de B_1 par S_2.

- **Exercice 7 :**

ABCD est un rectangle tel que $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$, BC = 2 AB et D est le milieu de [AE]. I est le symétrique de A par rapport à (BD).
1. On considère la similitude directe S de centre I qui transforme B en D. Déterminer son angle, son rapport et l'image du point A.
2. Montrer que I, C et E sont alignés. Trouver l'antécédent de C par la similitude S.

- **Exercice 8 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi).$$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
1. Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.
a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1.
b) Montrer que S_1 (C) = I. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.
2. Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2.
b) Soient M un point de (BI), M' son image par S_2. On suppose que M et M' sont distincts de I.
Montrer que les quatre points (A, M, I, M') sont cocycliques.

(on dit que des points sont cocycliques lorsqu'ils appartiennent à un même cercle)