Isométries planes - déplacements

1. Définition - Propriétés

Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.

Propriétés

- Les déplacements sont les translations et les rotations.
- Un déplacement laissant invariant un point est une rotation.
- La composée de deux déplacements est un déplacement.

2. Compositions de déplacements

- La composée de 2 translations est une translation.
- La composée d'une translation et d'une rotation d'angle θ est une rotation d'angle θ.
- Composée de deux rotations.

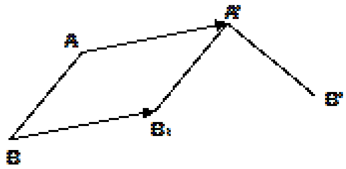
Théorème : Soient 2 rotations r_1 et r_2 d'angles respectifs θ_1 et θ_2.

- si $\theta_1 + \theta_2 = 0 + k.2\pi$ alors $r_1 \circ r_2$ est une translation.
- si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 + k.2\pi$ alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

3. Détermination d'un déplacement

a) f est un déplacement $A, B \in P$ et A'=f(A), B'=f(B), on a A'B'=AB.

b) réciproque : soit A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et A'B'=AB.
Montrons que qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = A' et f(B) = B'.



Existence : soit $t : A \to A'$ et on pose $B_1 = t(B)$ ce qui implique $A'B_1 = AB = A'B'$.
Alors il existe une rotation r de centre A' tel que $r(B_1) = B'$.
f=r o t est un déplacement et f(A) = A et f(B) = B'.

Unicité : supposons qu'il existe un déplacement g distinct de f tel que g(A) = A' et g(B) = B'.
On a $f^{-1} \circ g\,(A) = A$ et $f^{-1} \circ g\,(B) = B$, ce qui implique $f^{-1} \circ g = s_{AB}$ d'où $g = f \circ s_{AB}$ i.e. g est un antidéplacement. Ce qui est contradictoire

Théorème

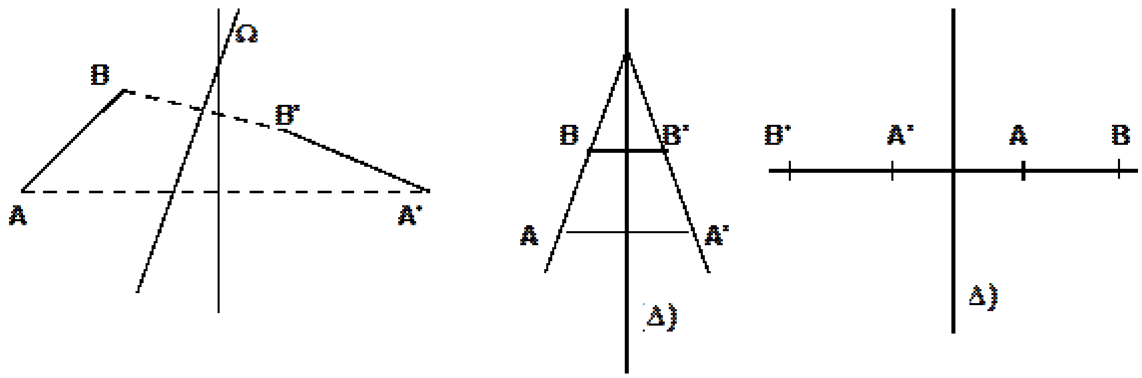
A, B, A', B' sont 4 points tels que $A \neq B$ et AB = A'B'. Il existe un déplacement est un seul transformant A en A' et B en B'. Ce déplacement est :

- la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
- une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ lorsque $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$.

Construction du centre Ω de la rotation.

- Dans le cas général, le centre Ω est l'intersection des médiatrices de [AA'] et de [BB'].

- Si [AA'] et [BB'] on la même médiatrice (Δ), on montre que Ω est l'intersection de (AB) et (Δ)



Exemple : Détermination de la composée r o r' où $r = r(A; \frac{\pi}{3})$ et $r' = r'(B; \frac{\pi}{6})$.

Pour trouver le centre Ω, on écrit r et r' comme composées de réflexions.

4. Expression analytique

f est un déplacement qui transforme M(x,y) en M'(x',y'). L'expression analytique de f est de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$