Probabilité

1. Introduction

Le calcul des probabilités débuta véritablement au XVIIe siècle, lorsque Pascal et Fermat, suivi de Huygens et Bernoulli entreprirent l'étude de certain jeu de hasard. Il fut développé au XIX e siècle pour être appliqué aussi bien en Sciences sociales (Économie …) qu'en science physique. En 1933, le Soviétique Kolmogorov en donna un exposé axiomatique cohérent.

2. Vocabulaire

• .La probabilité est un outil mathématique permettant la mesure des phénomènes aléatoires, c'est-à-dire liés au hasard.

• Une épreuve est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat précis.

• L'univers d'une épreuve est l'ensemble de tous les résultats possibles.

• Toute partie de l'événement est appelée événement. 0n note généralement un événement à l'aide d'une lettre A, B, C,…

• Une éventualité est un élément de l'univers.

• Les singletons s'appellent « événements élémentaires »

• L'événement contraire de A est l'événement noté $\bar{A}$ qui est réalisé si A ne l'est pas .

Exemple

0n lance un dé dont les faces sont numérotés de1 à 6, et on note le numéro de la face supérieure. Le tableau suivant regroupe les vocabulaires à utiliser.

Vocabulaires	Significations	Exemples
Univers Ω	Ensemble des résultats	Ω = {1,2,3,4,5,6}
Éventualité	Un résultat	{5}
Événement	Une partie de Ω	B :‹‹Obtenir un nombre pair››
Événement élémentaire	Sous ensemble à un élément	{3}
Événement certain	Ω	Avoir un nombre inférieur ou égal à 6
Événement impossible	$\emptyset$	Avoir le nombre 7
Événement contraire de A noté $\bar{A}$	Résultat possible qui n'est pas dans A	B :‹‹Obtenir un nombre pair›› $\bar{B}$:‹‹Obtenir un nombre impair››
Événement A ou B	AUB	Obtenir un nombre pair ou divisible par 3
Événement A et B	$A \cap B$	Obtenir un nombre pair et premier
Événement incompatible	$A \cap B = \emptyset$	A :‹‹Obtenir un nombre pair›› B : ‹‹Avoir le nombre 5 ››

3. Calcul de probabilité

3.1 Définition

On définit une probabilité P sur l'univers Ω = { e_1, e_2, …, e_n } en associant à chaque événement élémentaire {e_i} de Ω un nombre réel positif p_i vérifiant :

1) $0 \leqslant p_i \leqslant 1$

2) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités de toutes les éventualités appartenant à A.

Exemple

les six faces d'un dé cubique bien équilibré sont numérotés 1, 2, 2, 3, 3, 3 . On jette une fois ce dé.

1) Calculer l probabilité des événements élémentaires.

2) Calculer l probabilité de l'événement : « Avoir un nombre impair ».

Réponse

1) On a : $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2) A = {1,3} ; alors P(A) = $p_1 + p_3$ = $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$; P(A) = $\frac{2}{3}$

3.2 Propriétés

0n a les propriétés suivantes :

- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\Omega) = 1$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- P(A U B) = P(A) + P(B) — P($A \cap B$).
- $P(\bar{\bar{A}})$ + P(A) = 1.on en déduit P($\bar{A}$) = 1- P(A)

4. L'équiprobabilité

Pour une situation donnée, il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont les mêmes probabilités. Dans ce cas, pour un événement A quelconque, on a:

P(A) = $\frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorable}{Nombre\ de\ cas\ possible}$

Exemple

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 4 blanches et 6 noires.0n tire 3 boules de l'urne. Dans chacun des cas suivants,déterminer le nombre de cas possibles, puis la probabilité de l'événement A : « obtenir deux blanches et une noire ››

1) les boules sont tirées simultanément.

2) les boules sont tirées successivement sans remise.

Réponse

1) Le tirage est simultané, on est dans le cas d'une combinaison. Card Ω = C_{10}^{3} = 120(avec la calculatrice 10 →touche nCr→ 3 →=)

P(A) = $\frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^2}$ P(A) = $\frac{3}{10}$.

2) Le tirage est successive et sans remise . On est dans le cas d'un arrangement sans répétition.

Card Ω = A_{10}^{3} = 720 (avec la calculatrice 10 → touche shift→touche nCr→ 3 →=)

pour le calcul de p(A) , il faut tenir compte de l'importance de l'ordre, donc ,A = BBN ou BNB ou NBB

Card A = $3A_4^2 A_6^1$ = 216. p(A) = $p(A)=\frac{216}{720}=\frac{3}{10}$