Isométries et nombres complexes

1. Ecriture complexe d'une translation et d'une rotation

Théorème

. Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. M'= t(M) équivaut à z' = z +b.

. Soit r la rotation de centre Ω (z_Ω) et d'angle θ. M'= r(M) équivaut à $z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)e^{i\theta}$

Une rotation r de centre Ω et d'angle θ est :

$$r : M \to M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})=\theta \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} |z'-z_\Omega|=|z-z_\Omega| \\ \arg(z'-z_\Omega)-\arg(z-z_\Omega)=\arg\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=\theta \end{cases}$$

D'où $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$

Alors, $z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)e^{i\theta}$ C'est de la forme : $z'=z\,e^{i\theta}+z_0$

Exemples :

1 - Donner la fonction F de C dans C qui à l'affixe de M associe l'affixe de f (M)

- f est la rotation de centre Ω (2 +i) et d'angle $\theta=-\frac{\pi}{6}$
- f est la rotation de centre Ω (6 -5i) et d'angle $\theta=\frac{2\pi}{3}$

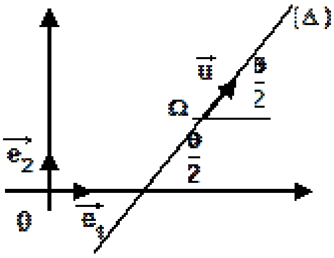
2 - Au point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' par une rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$. Sachant que r(A)=B où A et B sont les points d'affixes respectives 1+i et −2+2i, exprimer z' en fonction de z.

2. Expression complexe d'une symétrie

On vérifie facilement que la symétrie orthogonale (ou réflexion) par rapport à Ox est s_{Ox} : $z'=\bar{z}$

Théorème

Soit s une réflexion d'axe Δ passant par le point Ω d'affixe z_Ω et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $(\overrightarrow{e_1},\vec{u})=\dfrac{\theta}{2}+k.2\pi$, où $k\in Z$. Alors M'=s(M) équivaut à $z'-z_\Omega=(\bar{z}-\overline{z_\Omega})e^{i\theta}$.



3. Transformation d'écriture complexe z' = az+b, |a| =1

Théorème

a et b complexes avec | a | = 1. Toute application d'écriture complexe z ' = az +b est un déplacement.

Théorème

Soit f la transformation d'écriture complexe z' = az+b avec |a| =1.

- Si a = 1 alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
- Si $a \neq 1$ alors f est une rotation de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)$

4. Transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, $|a| = 1$

Théorème

a et b complexes avec | a | = 1. Toute application d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ est un antidéplacement.

Pour le bipoint (A, B) et son image (A', B'), on a $z_{B'} - z_{A'} = a(\overline{z_B} - \overline{z_A})$, ce qui implique $\left|z_{B'} - z_{A'}\right| = \left|\overline{z_B} - \overline{z_A}\right|$, alors A'B' = AB. D'où f est une isométrie

Pour A, B, C, D et leurs images A', B', C', D', on a :

$$\arg\left(\frac{z_{D'} - z_{C'}}{z_{B'} - z_{A'}}\right) = \arg\left(\overline{\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}}\right) = -\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$ ce qui implique $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

f est isométrie qui transforme un angle orienté en son opposé.

Théorème

Soit f la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, $|a| = 1$

- Si $a\bar{b} + b = 0$, f est une réflexion dont l'axe est l'ensemble des points invariants.
- Si $a\bar{b} + b \neq 0$, f est la composée d'une translation et d'une réflexion (ymétrie glissée).

Remarque : si $a\bar{b} + b = 0$ l'axe de la réflexion est la médiatrice de [OO'] où O' = f(O).

Méthode

Comment étudier $z' = a\bar{z} + b$, $|a| = 1$ **?**

Soit I le milieu de [OO']. L'affixe de I est $\frac{b}{2}$.

- si f (I) =I, $f = s_{\Delta}$ où (Δ) est la médiatrice de [OO'].
- si $f(I) \neq I$, f est une symétrie glissée $f = s_{\Delta, \vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$

la translation $t_{\vec{u}}$ est telle que $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ et la réflexion $s_{\Delta} = t_{-\vec{u}} \circ f$

5. Exemples

1 - Donner les éléments caractéristiques de la transformation qui au point M d'affixe z associe le point d'affixe z' tel que :

$z' = iz + 1$; $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z + i2\sqrt{2}$

2 - La droite D a pour équation y = 2x + 1 dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Au point M (x, y) on associe son affixe z = x + iy. Calculer en fonction de z l'affixe du symétrique de M par rapport à D.

3 - On considère la fonction qui au point M (z) associe le point M' (z') tel que $z' = -\bar{z} + 2 - 3i$.

- Montrer que f est la composée de la réflexion par rapport à l'axe imaginaire suivie d'une translation que l'on précisera.

- Montrer que g = fof est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{u}$.

Montrer que $t_{-\frac{\vec{u}}{2}} \circ f$ est une réflexion s dont on précisera l'axe.

- Montrer que $f = s \circ t_{\frac{\vec{u}}{2}}$