Isometries planes

P est un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel V.

$R = (O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère de P.

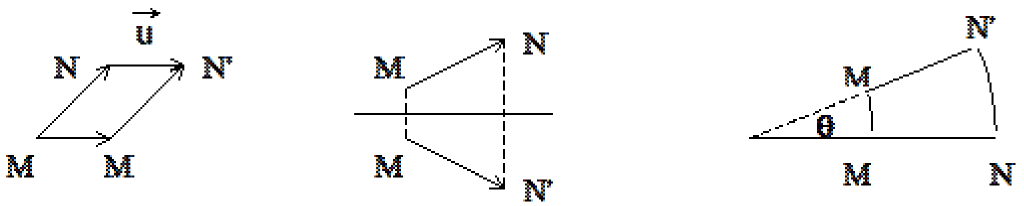
1. Généralités

1.1 Définition

On appelle *isométrie* toute application affine f de P dans P qui conserve les distances.

Pour tout A et B appartenant à P, si f(A) = A' et f(B) = B' alors A'B' = AB.

Exemples : l'identité, une translation, une symétrie par rapport à un point, une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion), une rotation d'angle non nul sont des isométries.



Une isométrie qui conserve les angles orientés est un déplacement.
Une isométrie qui change un angle orienté en son opposé est un antidéplacement.

1.2 Propriétés et théorèmes

On démontre qu'une isométrie est bijective.

La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

La composée de deux isométries est une isométrie.

Remarque : $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Une isométrie conserve le produit scalaire.

Démonstration : Soient trois points M, B, C et M', B', C' leurs images par l'isométrie f.

On a $BC^2 = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM})^2 = MC^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{BM}$

de même $B'C'^2 = (\overrightarrow{M'C'} - \overrightarrow{B'M'})^2 = M'C'^2 + M'B'^2 - 2\overrightarrow{M'C'}.\overrightarrow{B'M'}$

f étant une isométrie : M'B' = MB ; M'C' = MC et B'C' = BC

d'où $\overrightarrow{M'C'}.\overrightarrow{M'B'} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}$

- En particulier : Une isométrie conserve l'orthogonalité.

si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ alors $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = 0$.

- De plus une isométrie conserve :
  - le parallélisme : si D_1 et D_2 sont parallèles, alors $f(D_1)$ et $f(D_2)$ sont parallèles.
  - l'équipollence : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
  - On démontre qu'une isométrie conserve les aires. Les angles géométriques

- L'image d'une droite par une isométrie est une droite.

L'image du segment [AB] est le segment {A'B']
L'image d'un cercle C de centre O, de rayon R est un cercle C' de centre O' et de rayon R'=R.

2. Translation – rotation - réflexion

2.1 Composée de deux réflexions

a) composée de deux réflexions d'axes parallèles

Théorème

s_D et $s_{D'}$ sont 2 réflexions d'axes D et D' parallèles, leur composée $s_{D'} \circ s_D$ est une translation de vecteur $2\vec{v}$ telle que $t_{\vec{v}}(D) = D'$.

b) composée de deux réflexions d'axes sécants

Théorème

s_D et $s_{D'}$ sont 2 réflexions d'axes D et D' sécants en Ω, leur composée $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = 2(\vec{u}, \vec{u'}) + k2\pi$ où $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont des vecteurs directeurs de (D) et (D').

2.2 Théorème de décomposition

a) décomposition de $t_{\vec{u}}$

Théorème

Toute translation de vecteur $\vec{u}$ est la composée de deux réflexions d'axes parallèles (D) et (D') : $t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ s_D$

Démonstration : Soit (D) une droite de vecteur normal $\vec{u}$ et soit (D') telle que $D' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$,

on a $s_{D'} \circ s_D = t_{\vec{u}}$.

Remarques : - (D) est une droite arbitraire de vecteur normal $\vec{u}$.

- (D') se déduit de (D) par une translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

b) décomposition d'une rotation $r(\Omega,\theta)$

Théorème

Toute rotation r de centre Ω et d'angle θ est la composée de deux réflexions d'axes D et D' sécantes en Ω telles que D se déduit de D' par une rotation d'angle $\frac{\theta}{2}$.

Démonstration ; Soit D passant par Ω et $D' = r_{(\Omega,\frac{\theta}{2})}(D)$. D'après le théorème précédent,

$s_{D'} \circ s_D = r(\Omega,\theta)$

Remarques : D est une droite arbitraire passant par Ω, D' est l'image de D par la rotation $r(\Omega,\frac{\theta}{2})$.

- La décomposition n'est pas unique.

3. Etude des isométries

3.1 Isométries admettant au moins un point invariant

Propriétés :
f est une isométrie fixant un point O c'est-à-dire f(O)=O.
- Si f admet 3 points invariants non alignés, f est l'identité.
- Si f admet au moins deux points invariants A et B et ne fixant pas 3 points invariants non alignés alors f est la réflexion d'axe (AB).
- Si f admet un unique point fixe O, alors f est une rotation de centre O.

Remarque :
Une isométrie plane fixant un point O est :
- une réflexion d'axe passant par O
- ou une rotation de centre O (éventuellement égale à l'identité)

3.2 Décomposition d'une isométrie

Théorème
O est un point du plan P, f une isométrie du plan. f se décompose de manière unique en f=t o u où t est une translation et u une isométrie laissant invariant O.

Démonstration. Existence. Soit O'=f(O) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, soit $u=t^{-1}of$. On a f = t o u et $u(O)=t^{-1}of(O)=t^{-1}(O')=O$. D'où u(O)=O.
Unicité. Supposons qu'il existe t' et u' avec u'(O)=O telles que t o u = t' o u'. On a t o u(O) = t' o u'(O) implique t(O)=t'(O) ; comme t et t' sont des translations, on t=t'.
On a $t^{-1}otou=t^{-1}ot'ou'$, alors u=u'.
Donc la décomposition est unique.

3.3 Classifications des isométries

Toute isométrie f s'écrit sous la forme f = t o u.
- Si u =id alors f est une translation (composée de 2 réflexions)
- Si u est une réflexion, alors f est la composée de 3 réflexions.

Remarque : dans certains cas cette composée peut se réduire à une réflexion :
$s_D \circ s_D \circ s_D = s_D$
- Si u est une rotation, alors f est une rotation. (composition de 2 réflexions)

Théorème
Les isométries planes sont :
- les réflexions
- la composée de 2 réflexions : translation, rotation
- la composée de 3 réflexions.