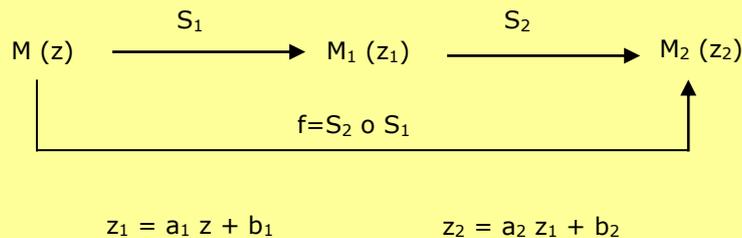


Similitude plane : Fiche 4

Comment caractériser la composée de 2 similitudes directes connaissant leurs écritures complexes ?

Méthode

- Si S_1 et S_2 ont respectivement pour écritures complexes : $z' = a_1 z + b_1$ et $z' = a_2 z + b_2$, alors :



- Dans z_2 on remplace z_1 par son expression.
- Ecrire l'application ainsi obtenue sous la forme $z' = az + b$.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

. Cas où $a \in \mathbb{R}$

$a=1$: f est une translation de vecteur \vec{u} d'affixe b

$a \neq 1$: f est une homothétie d'angle $\theta = \arg a$

. Cas où $a \notin \mathbb{R}$

$|a| = 1$: f est une rotation d'angle $\theta = \arg a$, de centre $\Omega(z_\Omega = \frac{b}{1-a})$

$|a| \neq 1, a \notin \mathbb{R}^*$: f est une similitude directe d'angle $\theta = \arg a$, de rapport $k = |a|$, de centre $\Omega(z_\Omega = \frac{b}{1-a})$

Exemples d'application

- Déterminer l'écriture complexe des similitudes directes :
 - . S_1 de centre Ω_1 d'affixe $(-1 - i)$ de rapport $k_1 = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$
 - . S_2 de centre Ω_2 d'affixe $(2i)$ de rapport $k_1 = 2$ et d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$
- Déterminer l'écriture complexe de la composée $f = S_2 \circ S_1$.
- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

Réponses non détaillées :

L'écriture complexe d'une similitude directe $S(\Omega(\omega), k, \theta)$ est : $z' = k e^{i\theta} z + (1 - k e^{i\theta}) z_\Omega$.

- **Écriture complexe de S_1 :**

$$z \mapsto z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + (1 - \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})(-1 - i)$$

En remplaçant $e^{i\frac{\pi}{4}}$ par $(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$ et après développement, on obtient :

$$z_1 = (1+i) z - 1+i.$$

- Ecriture complexe de S_2

$$z_1 \mapsto z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z_1 + (1 - 2e^{i\frac{\pi}{2}})(2i)$$

Comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, on a :

$$z' = 2i z_1 + 4+2i.$$

- Ecriture complexe de $f = S_2 \circ S_1$.

On remplace ensuite z_1 par son expression, ce qui donne : $z' = 2i [(1+i) z - 1+i] + 4+2i$, c'est-à-dire, l'écriture complexe de $f = S_2 \circ S_1$ est $z' = (-2+2i) z + 2$

- Nature de f :

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$, avec $a = -2 + 2i$.

Comme $a \notin \mathbb{R}$, f est une similitude directe.

- Éléments caractéristiques de f :

f est la similitude directe :

- de rapport $k = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.

- d'angle $\theta = \arg(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$

- de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{2}{1-(-2+2i)} = \frac{6}{13} + \frac{11}{13}i$

Exercices proposés

• Exercice 1 :

1. Déterminer l'écriture complexe des similitudes directes S et S' telles que :

. S de centre d'affixe 3, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

. S' de centre d'affixe $2i$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. Déterminer l'écriture complexe des transformations $S' \circ S$ puis $S \circ S'$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de ces transformations.

Les transformations $S' \circ S$ puis $S \circ S'$ sont-elles égales ?