Similitude plane : Fiche 4

Comment caractériser la composée de 2 similitudes directes connaissant leurs écritures complexes ?

Méthode

- Si S_1 et S_2 ont respectivement pour écritures complexes : $z'=a_1 z + b_1$ et $z'=a_2 z + b_2$, alors :

$$\begin{tikzcd} M(z) \arrow[r, "S_1"] \arrow[rr, bend right, "f=S_2 \circ S_1"'] & M_1(z_1) \arrow[r, "S_2"] & M_2(z_2) \end{tikzcd}$$

$z_1 = a_1 z + b_1$ $\qquad$ $z_2 = a_2 z_1 + b_2$

- Dans z_2 on remplace z_1 par son expression.
- Ecrire l'application ainsi obtenue sous la forme $z'=az + b$.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
  - . Cas où $a \in IR$
    - $a=1$: f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
    - $a\neq 1$: f est une homothétie d'angle θ = arg a
  - . Cas où $a \notin IR$
    - $|a| =1$: f est une rotation d'angle θ = arg a, de centre $\Omega(z_\Omega = \frac{b}{1-a})$
    - $|a| \neq 1$, $a \notin IR^*$: f est une similitude directe d'angle θ = arg a, de rapport $k = | a |$, de centre $\Omega(z_\Omega = \frac{b}{1-a})$

Exemples d'application

- Déterminer l'écriture complexe des similitudes directes :
  - . S_1 de centre Ω_1 d'affixe $(-1 - i)$ de rapport $k_1 = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$
  - . S_2 de centre Ω_2 d'affixe $(2 i)$ de rapport $k_1 = 2$ et d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$
- Déterminer l'écriture complexe de la composée $f = S_2 \circ S_1$.
- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Réponses non détaillées :

L'écriture complexe d'une similitude directe $S(\Omega(\omega) , k , \theta)$ ***est :*** $\mathbf{z' = k e^{i\theta} z + (1 - k e^{i\theta}) z_\Omega}$.

- **Ecriture complexe de S_1** :

$$z \mapsto z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z + (1 - \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})(-1-i)$$

En remplaçant $e^{i\frac{\pi}{4}}$ par $(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$ et après développement, on obtient :

$z_1 = (1+i)z - 1 + i$.

- **Ecriture complexe de S_2**

$$z_1 \mapsto z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 + (1 - 2e^{i\frac{\pi}{2}})(2i)$$

Comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, on a :

$z' = 2i\, z_1 + 4 + 2i$.

- **Ecriture complexe de f= S_2 o S_1.**

On remplace ensuite z_1 par son expression, ce qui donne : $z' = 2i\,[(1+i)z - 1 + i] + 4 + 2i$, c'est-à-dire, l'écriture complexe de $f = S_2 \circ S_1$ est $z' = (-2+2i)z + 2$

- **Nature de f** :

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$, avec $a = -2 + 2i$.
Comme $a \notin \mathbb{R}$, f est une similitude directe.

- **Eléments caractéristiques de f** :

f est la similitude directe :

- de rapport $k = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.
- d'angle $\theta = \arg(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$
- de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{2}{1-(-2+2i)} = \frac{6}{13} + \frac{11}{13}i$

Exercices proposés

- **Exercice 1 :**

1. Déterminer l'écriture complexe des similitudes directes S et S' telles que :

   . S de centre d'affixe 3, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   . S' de centre d'affixe 2 i, de rapport 2 et d' angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. Déterminer l'écriture complexe des transformations S' o S puis S o S'.
   b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de ces transformations.
   Les transformations S' o S puis S o S' sont-elles égales ?