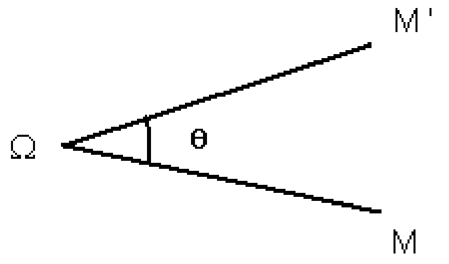
ROTATIONS

1. Définitions

Ω un point et θ un réel. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ, l'application, qui à tout point M distinct de Ω, associe le point M' défini par : $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta$.
On note $r(\Omega, \theta)$



Exemples :
- L'application identique est une rotation d'angle 0.
- $r(\Omega, \pi)$: demi-tour ou symétrie centrale de centre Ω ou homothétie de rapport k=-1.
- $r(\Omega, \frac{\pi}{2})$: quart de tour direct.

2. Propriétés - théorèmes

Le centre Ω est l'unique point invariant.

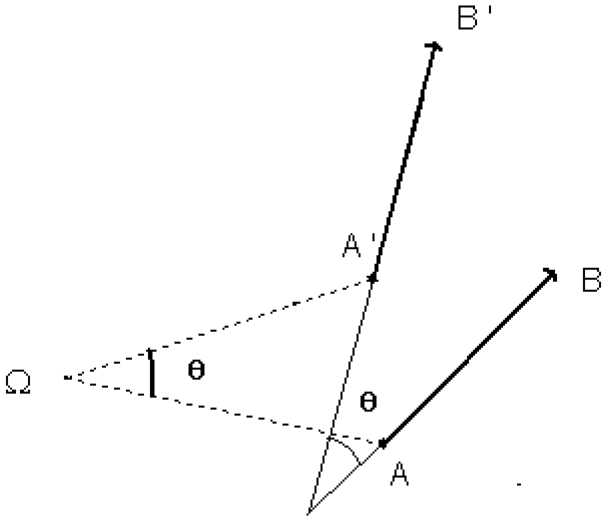
- Un rotation est une application bijective.

- La réciproque d'une rotation d'angle θ est une rotation d'angle $-\theta$.

- La composée de deux rotations $r_1 = r_1(\Omega, \theta_1)$ et $r_2 = r_2(\Omega, \theta_2)$ de même centre Ω est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Image d'un ensemble de points

- L'image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment par une rotation est d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment.
- L'image d'un cercle
- L'image d'un angle orienté par une rotation est un angle orienté de même mesure $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- 2 points A et B et leurs images respectives A' et B' par une rotation d'angle θ sont tels que : AB = A'B' et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$



3. Expression complexe d'une rotation

Soit r la rotation de centre Ω (z_Ω) et d'angle θ.

$$r : M \to M' \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} |z' - z_\Omega| = |z - z_\Omega| \\ \arg(z' - z_\Omega) - \arg(z - z_\Omega) = \arg\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \theta \end{cases}$$

D'où $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Alors,

L'expression complexe d'une rotation de centre Ω (z_Ω) et d'angle θ est : $z' - z_\Omega = (z - z_\Omega)e^{i\theta}$

On peut mettre sous la forme : $z' = ze^{i\theta} + z_0$

4. Expression analytique

L'image d'un point M, d'affixe z par une rotation de centre Ω (z_Ω) et d'angle θ, est un point M' d'affixe z' tel que $z' - z_\Omega = (z - z_\Omega)e^{i\theta}$.

Posons z = x + iy et z' = x'+iy'. On montre que :

$$\begin{cases} x' - x_0 = (\cos\theta)(x - x_0) - (\sin\theta)(y - y_0) \\ y' - y_0 = (\sin\theta)(x - x_0) + (\cos\theta)(y - y_0) \end{cases}$$

On vérifie que c'est de la forme :

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)x - (\sin\theta)y + p \\ y'' = (\sin\theta)x + (\cos\theta)y + q \end{cases}$$