Applications des nombres complexes à la trigonométrie

Exercice 1

Soit le complexe $Z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$.

1. Ecrire Z sous forme exponentielle.
2. Reprendre la forme initiale de Z pour déterminer sa forme algébrique.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 2

1. Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$ dans l'ensemble des nombres complexes.
2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

Exercice 3

a) Utiliser une formule d'Euler pour exprimer $\sin^3 x$ en fonction de sin 3x et sin x.

b) Linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^3 x.\cos^2 x$

Exercice 4

Exprimer en fonctions des puissances de sin x et de cos x : cos 4x , sin 5x – sin 3x

Exercice 5

Soit les nombres complexes : $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

1. Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
3. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2$.

Résoudre cette équation dans C et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 6

1. Quel est le conjugué de $x+e^{i\alpha}$, où x et α sont des réels ?
2. Exprimer en fonction de $\tan\alpha$ les nombres $\dfrac{e^{2i\alpha}-1}{e^{2i\alpha}+1}$ et $e^{4i\alpha}+2e^{2i\alpha}+1$

Exercice 7

En calculant de deux manières différentes $(1+j)^n, (1+j^2)^n, (1+1)^n$ et en utilisant la relation

$1+j+j^2 = 0$, déduire : $S_0 = 1 + C_n^3 + C_n^6 + ... + C_n^{3k} ......$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ...+ C_n^{3p+1} + ...$$

$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 ....+ C_n^{3q+2} + ...$$

Exercice 8

1. Soit q un nombre complexe quelconque. Montrer que :

$$\text{si } q \neq 1, \text{et } n \in IN, \text{ alors } \quad 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2. Soit T un élément de [0 ;π], et n un entier naturel non nul.

On pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt$.

a) Calculer $C_n(t) + iS_n(t)$.

b) En déduire, si t = 0, $C_n(t) = n$ et si $t \in]0 ; \pi]$, $C_n(t) = \dfrac{\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A_k, $(0 \leq k < n)$ d'affixes :

$z_k = a(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n})$ avec $a > 0$ et le point M d'affixe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r >0.

a) Démontrer que $z^n - a^n = (z-a)(z-z_1)(z-z_2).......(z-z_{n-1})$.

b) De la relation trouvée pour a = 1, déduire $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}......\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = n2^{1-n}$

et $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}......\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.