Forme trigonométrique et exponentielle

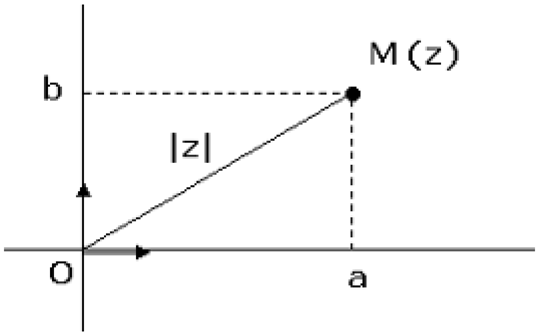
1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Module d'un nombre complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé ($0,\vec{u},\vec{v}$).

1.1.1 Définition

Le module d'un nombre complexe z, dont l'image est M, est la distance OM. On note | z | = OM.



Si z = a + ib, le module de z est |z| = $\sqrt{a^2+b^2}$

1.1.2 Propriétés

- Pour tout nombre complexe z et z' on a :
- $|\bar{z}|$ = |z| =| -z|.
- |z| = 0 si et seulement si z = 0
- |zz'| = |z| |z'|
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

1.1.3 Module et distance

Si z_A et z_B sont les affixes des points A et B , on a AB = $|z_B - z_A|$.

1.2 Argument d'un nombre complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé ($0,\vec{u},\vec{v}$).

1.2.1 Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe. On appelle argument de z et on note arg(z) une mesure de l'angle ($\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}$)

1.2.2 Remarques

- Le complexe 0 a un module nul mais son argument n'est pas défini.
- arg z est défini à 2π près.
- Un nombre réel strictement positif a pour argument $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
- Un nombre imaginaire pour a pour argument $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Exemple

Déterminer le module de z = 1 – i.

$|z|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

1.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.3.1 Définition

Soit z un nombre complexe non nul . z peut s'écrire sous la forme:

z =r (cos q + i sin q) où r est le module de z et q un argument de z. Cette forme est la *forme* trigonométrique de z.

Il est parfois commode d'écrire aussi: z = [r ;q]. C'est la forme polaire

1.3.2 Relation entre forme algébrique et forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul.

La forme algébrique de z est z = a + ib avec Re (z) = a et Im (z) = b.

On a $\cos\theta=\frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta=\frac{b}{|z|}$

La forme trigonométrique de z est z =ρ(cos θ + i sin θ) avec ρ = |z| et arg (z) =θ+ 2kπ.

On a: Re (z) = a = ρ. cos θ et Im (z) = b = ρ . sin θ

Exemple

Écrire sous forme trigonométrique z = 1 + i.

0n a : |z| = $\sqrt{1^2+1^2}$ = $\sqrt{2}$. Soit θ un argument de z .cos θ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et sin θ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Une valeur de θ est $\frac{\pi}{4}$ donc z = $\sqrt{2}$ (cos $\frac{\pi}{4}$ + i sin $\frac{\pi}{4}$).

2. Notation exponentielle d'un nombre complexe

2.1 Définition

Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta}$ = cos θ + i sin θ. Si z est un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ , la forme exponentielle de z est z = $\rho e^{i\theta}$.

Exemple

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2.2 Formules d'Euler

Pour tout réel q, on a : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ et $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

Par addition et soustraction membre à membre, on a :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$