

L'ensemble des nombres complexes

1. Présentation

1.1 Introduction

Nous admettons que l'on peut construire un sur-ensemble de \mathbb{R} , noté \mathbb{C} , dont les éléments sont appelés *nombres complexes*, et qui vérifie :

- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de \mathbb{R} et qui suivent les mêmes règles de calcul
- \mathbb{C} contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$.

1.2 Forme algébrique

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = a + i b$ où a et b sont des réels.

Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + i b$, où a et b sont des nombres réels quelconques et i est un nombre vérifiant $i^2 = -1$

Pour le nombre complexe $z = a + i b$, a est appelé la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z .

Notation : $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**

Exemples

$$z_1 = 1 - 2i ; z_2 = 4i ; z_3 = -3 + 2i$$

1.3 Calcul dans \mathbb{C}

L'addition et la multiplication dans \mathbb{C} suivent les mêmes règles que dans \mathbb{R} .

1.3.1 Égalité de deux complexes

Comme tout complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$, a et $b \in \mathbb{R}$, on en déduit :

Deux complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Conséquence : $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

1.3.2 Addition dans \mathbb{C}

$$(a + ib) + (c + id) = (a+c) + i(b+d)$$

1.3.3 Multiplication dans \mathbb{C}

On effectue la multiplication comme dans \mathbb{R} , mais on remplace i^2 par -1 .

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\text{En particulier : } (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab.$$

Exemple

Soit $z = 3 + 2i$ et $z' = 1 - 3i$. Calculer $z + z'$ et $z \cdot z'$

Solution

$$z + z' = 4 - i \text{ et } z \cdot z' = 9 - 7i.$$

1.4 Conjugué d'un nombre complexe

1.4.1 Définition

Le conjugué de $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

1.4.2 Propriétés

On a :

- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
- $\overline{\bar{z}} = z$.

1.4.3 Quotient de deux nombres complexes

Tout nombre complexe non nul z admet un inverse $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

Alors $\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'}$.

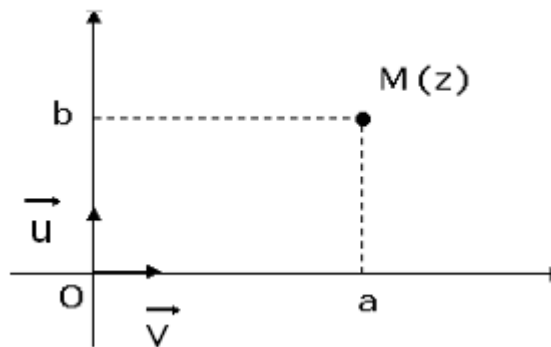
2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

On appelle plan complexe le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) tel que l'axe $(O; \vec{u})$ représente l'axe réel, et l'axe $(O; \vec{v})$ représente l'axe imaginaire.

2.1 Affixe d'un point

A tout nombre complexe $z = a + ib$ on peut associer le point M de coordonnées (a, b) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On dit que : M est l'image du nombre complexe z , et z est l'affixe du point M . On note $M(z)$.



- L'image d'un nombre réel est un point de l'axe réel.
- L'image d'un nombre imaginaire pur est un point de l'axe imaginaire.

Exemple : $M(-2)$; $N(3i)$; $P(1 + 2i)$.

2.2 Affixe d'un vecteur

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ l'affixe du vecteur \vec{AB} est $z = z_B - z_A$.

2.3 Représentation géométrique de l'opposé et du conjugué d'un nombre complexe

Les points image de $z = a + ib$ et de son opposé $-z = -a - ib$ sont symétriques par rapport à l'origine O

Les points image de $z = a + ib$ et de son conjugué $\bar{z} = a - ib$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.