# Séquence 2 : Mathématiques financières à long terme

## 1. Intérêts composés

### 1.1 Définition

Un capital est placé à intérêts composés si, à la fin de chaque période, l'intérêt gagné est ajouté au capital pour produire lui aussi un intérêt.

Sauf si on précise qu'il est à intérêts simples, un placement ou un emprunt sera toujours considéré comme étant à intérêts composés.

### 1.2 Calcul de la valeur acquise

#### 1.2.1 Formule de la valeur acquise

On place un capital $C_0$ pendant n périodes au taux t par période.

Fin de la première période : l'intérêt produit est $C_0 \times t$, le capital devient : $C_1 = C_0 \times (1+ t)$.

Fin de la deuxième période : l'intérêt produit est $C_1 \times t = C_0 \times (1 + t) \times t$, le capital devient alors

$C_2 = C_1 \times (1+ t) = C_0 \times (1+ t)^2$.

D'une période à l'autre, la capital est multiplié par (1+ t). La suite $C_n$ est donc une suite géométrique de premier terme $C_0$ et de raison 1+ t de sorte que : le capital à la fin des n périodes est $C_n = C_0 \times (1+ t)^n$.

La formule de la valeur acquise au bout de n périodes est : $C_n = C_0 \times (1+ t)^n$.

Exemples

1) On place 10 000 Ar au taux de 5 % pendant 4 ans . Quatre ans plus tard, on obtient:

$C_4 = 10\ 000 \times (1 + 0,05)^4 = 12\ 155$ Ar.

2) On a placé une somme de 100 000 Ar au taux de 10 % pendant 3 ans. Calculer la valeur acquise .

On a $C_4 = C_0 \times (1 + t)^3 = 100\ 000 \times (1+ 0,1)^3$ ; $C_4 = 133\ 100$ Ar

#### 1.2.2 Calcul de l'intérêt composé

Après n périodes la valeur acquise est $C_n = C_0 \times (1+ t)^n$. Donc l'intérêt produit est $I = C_n - C_0$.

L'intérêt composé pendant n périodes est : $I = C_0( 1 + t)^{n} - 1)$.

Exemple

Un capital de 20 000 Ar est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%. La capitalisation des intérêts est annuelle. Calculer la valeur acquise puis l'intérêt obtenu pendant un placement après 5 ans.

La valeur acquise en cinq ans est : $C_5 = C_0(1 + \frac{6}{100})^5 = 20\ 000 \times 1,06^5$ ; $C_5 = 26\ 764,51$ Ar.

L'intérêt total reçu après cinq ans est $I = 26\ 764,51 - 20\ 000$ ; $I = 6764,51$ Ar.

#### 1.2.3 Valeur actuelle d'un capital

La valeur actuelle est le capital $C_0$ qu'il faut placer à la période 0 à intérêt composé pour avoir une valeur acquise $C_n$ à la date n.

Après n périodes, La valeur acquise est : $C_n = C_0 \times (1+ t)^n$. On en déduit que $C_0 = \frac{C_n}{(1+t)^n}$ = $C_n(1 + t)^{-n}$ .

Donc, la formule de la valeur actuelle est : $C_0 = C_n(1 + t)^{-n}$ .

Exemple

Quelle somme faut-il placer à intérêts composés au taux de 5% pour obtenir au bout de 5 ans un capital de 12600 Ar? Capitalisation annuelle.

On a $C_0 = C_n(1 + t)^{-5} = 12600 \times 1,05^{-5}$ ; $C_0 = 9863,126$ Ar .

### 1.2.4 Taux équivalents

Deux taux, correspondant à des périodes de capitalisations différentes, sont équivalents s'ils donnent, pour une même période de placement, une même valeur acquise à intérêts composés.

Pour trouver le taux équivalent $t_k$ au taux t, on utilise la relation : $(1 + t) = (1 + t_k)^k$ .

Exemple

Calculer le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 10 %.

On a la relation $1 + 0,1 = (1 + t_k)^4$ ; donc , $t_k = 1,1^{\left(\frac{1}{4}\right)} - 1$ ce qui donne $t_k = 0,02$ . Enfin $t_k = 2$ % .

### 1.2.5 Calcul de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de période non entier

Pour effectuer un tel calcul, il existe deux méthodes : la méthode rationnelle et la méthode commerciale.

**a) La méthode rationnelle**

On applique la formule de l'intérêt composé sur la partie entière de la période, exprimée en termes d'années, et l'intérêt simple sur le reste de la durée, exprimée en termes de mois.

Exemple

On place à intérêts composés pour une durée de 4 ans et 4 mois un capital de 50 000 Ar au taux annuel de 5%. La capitalisation est annuelle. Calculer la valeur acquise.

Valeur acquise en 4 ans : $C_4 = 50\,000 \times 1,05^4$ . $C_4 = 60\,775,61$ Ar.

On calcule l'intérêt de ce capital en 4 mois (intérêt simple) . $I = \frac{60\,775,61 \, x \, 5 \, x \, 4}{1200}$ = 1012,9 Ar.

La valeur acquise est VA = 60 775,61 Ar + 60 775,61 Ar = 61 788,5 Ar.

**b) La méthode commerciale**

On applique tout simplement la formule de l'intérêt composé en exprimant la durée du placement n en nombre d'années.

Dans l'exemple précédent, n = 4 ans et 4 mois = $4 + \frac{4}{12}$ = 4,33.

$VA = 50\,000 \times (1 + 0,05)^{4,33} = 61\,761,76$ Ar .

# 2. Les annuités

## 2.1 Définition

L'annuité est le remboursement annuel d'un emprunt avec les intérêts par un montant constant, qui est calculé en fonction de l'intérêt et de la durée de l'emprunt . Une annuité peut désigner aussi à l'inverse un versement à intervalle régulier d'une même somme pour un placement échelonné.

Il y a deux types d'annuité : l'annuité constante et l'annuité variable .Dans le premier cas la somme placée ou remboursée reste les mêmes à chaque période , tandis que dans le deuxième cas la somme diminue chaque période jusqu'à liquidation totale de la dette ou du placement. Nous n'étudions que l'annuité constante .

Il y a quelques vocabulaires liés à l'annuité, à savoir :

- La période qui est le temps qui s'écoule entre deux versements consécutifs.
- Le terme qui est le montant de chaque versement effectué
- Le montant restant dû : comme expliqué plus haut, il s'agit de la somme d'argent qu'il reste à payer à l'emprunteur
- L'intérêt : qui représente un pourcentage du capital,et qui est ajouté à la dette afin de rémunérer l'organisme ou la personne qui prête l'argent.

## 2.2 Annuités constantes .

Ici, les sommes sont versées à la fin de chaque période . De plus, ces sommes sont constantes.

### 2.2.1 La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes

Soient :

- a le montant de l'annuité constante ;

- t le taux d'annuité ;

- n le nombre d'annuité ;

- $V_n$ la valeur acquise au moment du dernier versement

Le premier versement est placé pendant n -1 année, la valeur acquise est $a(1 + t)^{n-1}$.

Le deuxième versement est placé pendant n-2 année, la valeur acquise est $a(1 + t)^{n-2}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Le $(n – 2)^{ème}$ versement est placé pendant deux ans, la valeur acquise est $a(1 +t)^2$

Le $(n – 1)^{ème}$ versement est placé pendant un an, la valeur acquise est $a(1 +t)$

Le dernier versement n'a pas le temps de porter intérêt , la valeur acquise est a .

$V_n$ apparaît comme la somme des valeurs acquises par chacun des versements . Donc,

$V_n = a + a(1+t) + a(1 +t)^2 +\dots+ a(1 + t)^{n-2} + a(1 + t)^{n-1}$ . Si on pose $q = 1 + t$ ;

$V_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})$ .

C'est la somme des termes d'une suite géométrique :

$$V_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{1+t-1} \quad ; \quad V_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t} \quad .$$

La valeur acquise par une suite d'annuités au moment du dernier versement est : $V_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ .

Exemple

On verse 10 000Arpar an en début d'année pendant 8 ans au taux annuel de 6 %. Quel est la valeur acquise au moment du dernier versement .

$V_8 = 10\,000\,\frac{1{,}06^8 - 1}{0{,}06}$ ; V8 = 98 974, 68 Ar

### 2.2.2 La valeur actuelle d'une suite d'annuité constante

La valeur actualisée d'une suite d'annuités constantes est : $V_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ où

- a le montant de l'annuité constante ;
- t le taux périodique d'actualisation ;
- n le nombre de versement ;
- $V_n$ la valeur acquise au moment du dernier versement

Exemple

Pour acheter un ordinateur avec facilité de paiement, on rembourse 1460,23 Ar pendant 18 mois, le premier versement intervenant 1 mois après l'achat au taux d'actualisation 0,0975 %.Calculer la valeur actuelle de ces 18 mensualités de paiement.

Ici t = 0, 00975

$V_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 1460{,}23\,\frac{1-(1+0{,}00975)^{-18}}{0{,}00975}$ ; $V_0$ = 24 000,05 Ar.