Systèmes linéaires dans IR^3

Soit à résoudre le système :

(S1)

1. Résolution par substitution

1.1 Méthode

Pour résoudre par substitution un tel système

- On tire l'une des inconnues dans l'une des équations (choisir un inconnu sans coefficient)
- On porte cette valeur dans les deux autres équations. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues.
- On continue la résolution par substitution dans IR².

1.2 Exemple

Résoudre par substitution dans IR^3 :

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ x-y+2z=2 & (L_2) \\ x-2y-z=-2 & (L_3) \end{cases}$$

Dans (L_1), on a x = 3 – y – z. Portons cette valeur dans (L2) et (L3)

Dans (L_2) : 3 – y – z – y + 2z =2, ce qui donne 3 -2y +z = 2 ou encore -2y+z = 2.

Dans (L_3) : 3 – y – z -2y -z = -2, ce qui donne 3 -3y -2z = -2 ou encore -3y -2z = -5.

Résolvons dans IR² le système :

$$\begin{cases} -2y+z = -1 \\ -3y-2z = -5 \end{cases}$$

Après calcul, on trouve y = 1 et z = 1. Si on porte cette valeur dans l'expression de x, on a x = 1.

Par conséquent, la solution est S = { (1;1;1)}.

2. Méthode du pivot de Gauss

Soit à résoudre le système :

(S1)

1ère étape : Elimination

On élimine à l'aide de (L_1) une des inconnues, par exemple x dans L_2 et L_3

On obtient alors un système (S_2) équivalent à (S_1), de la forme

2e étape :

A l'aide de (L'_2) on élimine dans (L'_3) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

équivalent à (S_1)

3e étape : substitution remontante

On détermine z à partir de (L''_3), puis on substitue dans (L''_2)

On refait les mêmes opérations pour y et x.

Exemple :

Résoudre dans IR^3 le système :

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ x-y+2z=2 & (L_2) \\ x-2y-z=-2 & (L_3) \end{cases}$$

Réponse :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad 2y-z=1 & (L'_2) \\ \quad 3y+2z=5 & (L'_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad 2y-z=1 \\ \quad 7y \quad =7 \end{cases}$$

$$ce \;\; qui \;\; donne \begin{cases} y=1 \\ 2-z=1 \\ z=1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$d'où \quad S=\{(1,1,1)\}$$