Exercices sur le logarithme népérien : série n°3

Exercice 1 : Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes et tracer sa courbe représentative :

a) $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2)$ b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ c) $f(x) = \ln x - x$

d) $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ e) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)$ f) $f(x) = \frac{1}{\ln|x+1|}$

g) $f(x) = \frac{1}{4x(\ln x)^2}$ h) $\mathbf{f(x) = \frac{5x+1}{x+1} - 3\ln(x+1)}$ i) $\mathbf{f(x) = \frac{\ln x}{x}}$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, étudier les variations et tracer la courbe de f. On étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité de f en 0

a) $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$ b) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

c) $f(x) = x\ln x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ c) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = x^3 + 3 - 3\ln x}$

Etudier les variations de f. En déduire que f(x) > 0 quel que soit x > 0.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = x - 1 - \ln x}$

Etudier les variations de f. En déduire que ln x < x - 1 quel que soit x > 0.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \frac{\ln x}{x}}$

Etudier les variations de f. En déduire que ln x < x - 1 quel que soit x > 0.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x} - \ln x}$

1.- Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de en précisant les limites aux bornes du domaine de définition.

2.-Montrer qu'il existe un réel a tel que f(a)= 0.

3.-Montrer que 1,76 < a < 1,77.

4.-Donner le signe de g(x) pour 0< x < a, puis pour x > a.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = -x^2 + 3 - 2\ln x}$

1.-Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes du domaine de définition.

2.- a) Montrer qu'il existe un réel a tel que f(a)= 0.

b) Montrer que 1,48 < a < 1,49.

3.- Donner le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Exercice 14

On se propose d'établir que pour tout $x > 0$, . $0 < \dfrac{x\ln x}{x^2 - 1} < \dfrac{1}{2}$

1.-Montrer à l'aide d'un tableau de signe que pour tout $x > 0$, $0 < \dfrac{x\ln x}{x^2 - 1}$

2.- Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1) - x\ln x$

a) calculer g'(x) et g'' (x).
b) Etudier les variations de g' et montrer que g' (x) > 0 pour tout x différent de 1.
c) Etudier les variations de g . En déduire le signe de g(x).

Exercice 15

Soit f la fonction définie par. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x}$

1.- a) Etudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$
b) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$

2.- a) Etudier les variations de f en remarquant que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

b) Tracer la courbe représentative de f. (unité graphique : 2cm)

Exercice 16

1 - On considère la fonction g définie par g(x)= x + 1 + lnx
a) Etudier les variations de g .
b) Montrer qu'il existe un unique réel a tel que g(a) = 0. Montrer que $a \in]0{,}27 ; 0{,}28[$.
c) En déduire le signe de g(x) selon les valeurs de x.

2- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{4x\ln x}{x+1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f et calculer sa limite en $+\infty$.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{4\,g(x)}{(x+1)^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$
d) Montrer que f(a) = - 4 a et dresser le tableau de variation de f.

3 - Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 17 : A- On considère la fonction g définie par g(x) = 1 + x – 3 x lnx.
1.- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2.- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique a dans [1 , 2].
Montrer que $a \in]1{,}69 ; 1{,}7[$
3.- Donner, suivant les valeurs de x, le signe de g(x).

B- Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x)^3}$.

1.- Déterminer l'ensemble de définition D de f, et calculer les limites aux bornes de D.
En déduire les équations des asymptotes.
2.- Déterminer la fonction f ' dérivée de f. Montrer que f(x) et g(x) sont de même signe, pour tout $x \in \; 0;+\infty$.

3.- Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{3a(1+a)^2}$, et donner un encadrement de f(a).

4.- Dresser le tableau de variation de f.
5.- Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 1.
6.- Tracer T et C dans le même repère. Unité 2 cm.
7.- a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x différent de -1,

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(x+1)^2} \quad .$$

b) Calculer $I=\int_1^e f(x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties et en utilisant le résultat de 7.a).

Exercice 16 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=x(\ln x)^2$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
On note C sa courbe représentative.
1.-a) Montrer que f est continue en 0.
b)Etudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2.-a).- Etudier les variations de f.
b) Etudier la position de C par rapport à la droite D d'équation y = x et préciser les coordonnées de leurs points communs.
c) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse e^{-1}.
3.- Déterminer le sens de variation de la fonction définie par $g(x)=f(x)-\left(\frac{2}{e}-x\right)$.
En déduire la position de C par rapport à T.
4.- Tracer D, C et T dans le même repère.
5.- Calculer en cm^2, l'aire de l'ensemble de points M(x , y) tels que $1\leq x\leq e$ et $\frac{2}{x}\leq y\leq f(x)$.

Exercice 17 : Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur IR^+ par :

$f_n(x)=x\ (\ln x)^n$ pour $x\neq 0$, et $f_n(0)=0$.

On appelle C_n la courbe de f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormal (unité 5cm).

a – Etudier les variations de f_1 et construire C_1.

b – Etudier les variations de f_n pour n > 1. (On distinguera deux cas suivant la parité de n)

c – Démontrer que toutes les courbes C_n passent par 3 points fixes.

d – Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1} lorsque x décrit l'intervalle $[1;+\infty[$.

Exercice 18 : On considère, pour tout n de IN*, la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\frac{\ln x}{x^n}$.

1- Etudier les variations de f_n.

2- Tracer la courbe C_1 de f_1 dans un plan rapporté à un repère orthonormal. Préciser les asymptotes.

3- Pour tout $x\geq 1$, on pose $I_n(x)=\int_1^x f_n(t)dt$.

a) Calculer I_1.
b) En intégrant par parties, calculer I_n en fonction de n et de x, pour $x\geq 2$.

4- Calculer $\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$. (on distinguera deux cas n = 1 et $n\geq 2$).