Primitives d'une fonction

1. Généralités

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que F ' = f sur I.

Exemple

Soient f et F les fonctions définies respectivement par $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+\sqrt{x}+4$$

F est dérivable sur] 0 ; +∞ [, et $F'(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)$

Donc F est une primitive de f sur] 0 ; +∞ [

1.2 Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I y admet une primitive.

1.3 Ensemble des primitives d'une fonctions

Soit F une primitive de f sur I. et G la fonction définie par G(x) = F(x) + k où k est une constante réelle.

La fonction G est dérivable et G'(x)= F'(x)+0 = f(x).

Donc G est aussi une primitive de f sur I .

Réciproquement, soit G et F deux primitives de f sur I.

Posons h (x) = G(x) – F(x) pour tout x appartenant à I

F et G sont dérivables sur I, donc h est dérivable sur I.

h'(x)= G'(x) - F'(x) . pour tout x appartenant à I

Comme F et G sont des primitives de f, G'(x)= f(x) et F '(x)= f(x).

Alors h'(x)= 0 pour tout x appartenant à I. h est donc une fonction constante : il existe un réel k tele que pour tout x de I, h(x)= G(x) - F(x)= k

D'où G(x) = F(x) +k pour tout x appartenant à I.

a) Théorème

Soit F une primitive d'une fonction f sur I.

Alors G est une primitive de f sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que G(x) = F(x)+ k

b) Conséquence

Si une fonction admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité.

c) Primitive prenant une valeur donnée en un point x_0

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I, soient G une primitive de f, x_0 un élément de I, et y_0 un nombre réel.

Si F est une primitive de f, alors il existe un réel K tel que F(x)= G(x)+ k.

$F(x_0) = y_0$ si et seulement si $G(x_0) + k = y_0$, et $k = y_0 - G(x_0)$.

Et $F(x)= G(x) + y_0 - G(x_0)$

Ainsi :

Si une fonction f admet une primitive sur I, alors pour tous réel x_0 de I et y_0 de R, il existe une primitive F et une seule de f vérifiant $F(_0) = y_0$

Graphiquement ; cela signifie, que quel que soit le point M_0 (x_0, y_0), il existe une et une seule primitive de f, dont la courbe passe par le point M_0.

Exemple

Soit $f(x) = 3x^2 +2x + 4$

La fonction F définie par $F(x)= x^3 +x^2 + 4x -3$ est une primitive de f

Les primitives de f sont les fonction G définies par $G(x)= x^3 +x^2 + 4x - 3 +k$ où est une constante réelle.

Déterminons la primitive G de f vérifiant G(1) = -1

G(1) = 3 + k.

La condition G(1) = -1 ,donne k = - 4, ainsi $G(x) = x^3 +x^2 + 4x -7$.

2. Primitives des fonctions usuelles

La lecture à l'envers du tableau des dérivées des fonctions usuelles nous donne

f(x)	F(x)
a (constante)	ax+k
x^n $n>0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ +k
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}$ +k
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ +k
Sin x	- cos x +k
Cos x	Sin x +k
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	tan x +k

3. Opérations sur les primitives

Propriétés

- Si F est une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I, alors F+G est une primitive de f+g sur I
- Si F est une primitive de f sur I et k une constante réelle, alors k.F est une primitive de k.f sur I

Les résultats suivants découlent des formules de dérivation :

Si u et v sont des fonctions dérivables, de dérivées u' et v ',

$u^n.u'$ n >0	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$ + k
$\frac{u'}{u^2}$	- $\frac{1}{u}$ + k
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	2 $\sqrt{u}$ + k
u' v+v 'u	uv+k
$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$ +k
u' cos u	Sin u +k
u' sin u	-cos u +k
u'. v'ou	vou + k

En particulier,

- si $f(x)=(ax+b)^n$, alors $F(x)=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$ + k

- si f(x)= cos (ax+b) alors + k $F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$

- si f(x) = sin (ax+b) alors $F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ + k

Exemples

- $f(x)=2x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\sqrt{x}}$

  Alors $F(x)=2.\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-3\sqrt{x}+k$

- $f(x)=\frac{3}{(2x-1)^2}$

  Alors $F(x)=-3.\frac{1}{2x-1}$ + k

- $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$

Si on pose u(x) = x² +2x-3, on a u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)

Alors $f(x)=\frac{1}{2}\frac{2(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$

Et $F(x)=\frac{-1}{2}\frac{1}{u(x)}+k=\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2+2x-3}+k$

- $f(x)=(x+\frac{1}{x})^4(1-\frac{1}{x^2})$

On pose $u(x)=x+\frac{1}{x}$, on a $u'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, et $f(x)=u^4u'$

$F(x)=\frac{u^{4+1}}{4+1}+k=\frac{1}{5}(x+\frac{1}{x})^5+k$

4. Primitives des polynômes trigonométriques

Soit $f(x)=\sin^p x.\cos^q x$ où p et q sont des entiers naturels.

Si p ou q est impair, on écrit f(x) comme somme de fonctions de la forme $u^n(x)$. u'(x) en utilisant les formules $\cos^2x+\sin^2x = 2$, où n entier naturel.

Exemple

Soit f la fonction définie par f(x) = $\cos^3x$. Sin x

On a f(x) = $\cos^2x$.cos x. Sin x = $(1-\sin^2x)$.cos x.sinx

f(x) = cos x.sinx – $\sin^3x$.cos x

Les primitives de f sont les fonctions F définies par $F(x)=\frac{-1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{4}\sin^4 x+K$

si p et q sont pairs, on linéarise f(x) avec les formules d'Euler, ou avec les formules de transformations trigonométriques

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

Exemples

- $f(x)=\cos^2 x.\sin^4 x$

Comme $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$, on a $\cos^2 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4}$

et $\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{1}{(2i)^4}\left(e^{4ix}-4e^{3ix}.e^{-ix}+6e^{2ix}.e^{-2ix}-4e^{ix}.e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$

$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$

Alors $f(x) = \cos^2 x.\sin^4 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)\frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$

En développant ce produit, on a :

$f(x) = \frac{1}{64}[e^{6ix} + e^{-6ix} - 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) + 4]$

ou $f(x) = \frac{1}{64}[\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 4]$

Ce qui donne , en intégrant,

$F(x) = \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{16}x + K$

- $f(x) = \cos^2 x.\sin^2 x$

  $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ donc $f(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x)$

  $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$

  Ainsi $f(x) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1+\cos 4x}{2})$

  $f(x) = \frac{1-\cos 4x}{8}$

Les primitive de f sont les fonction F définies par $F(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + K$