Fractions rationnelles

1. Définitions

On appelle fractionnelle tout quotient de deux polynômes.

2. Résolution d'une équation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$

Considérons la fraction rationnelle $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

On rappelle que $\frac{a}{b}=0$ si et seulement si $a=0 \, et \, b\neq 0$.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ est définie si $Q(x)\neq 0$.

Les valeurs de x qui annulent ce dénominateurs sont appelées des valeurs interdites.

On a $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ si et seulement si $P(x)=0$

Les solutions de l'équation $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ sont les solutions de l'équation P(x)=0, différentes des valeurs interdites.

Exemple :

Soit à résoudre l'équation $\frac{2x-1}{x+1}=0$.

x+1=0 si x = -1. Donc -1 est une valeur interdite.

2x-1 = 0 si $x=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ est différente de la valeur interdite, donc c'est la solution de l'équation $\frac{2x-1}{x+1}=0$.

$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3. Résolution d'une inéquation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$

On rappelle que $\frac{a}{b}>0$ si et seulement si a et b sont de même signe, donc

$\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ si et seulement si P(x) et Q(x) sont de même signe $Q(x)\neq 0$.

Ainsi, pour résoudre une telle équation, on étudie le signe du quotient après avoir factorisé le numérateur et le dénominateur, en dressant le tableau de signe.

Exemple

Résoudre $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}\geq 0$.

Factorisons le numérateur $2x^2-x-1$.

cc BY SA

Le discriminant est $\Delta=(-1)^2-4(2)(-1)=9$. D'où les racines sont $x'=\frac{-(-1)-3}{2.2}=-\frac{1}{2}$ et $x'=\frac{-(-1)+3}{2.2}=1$

Ainsi $2x^2-x-1=2(x-1)(x+\frac{1}{2})$.

Le dénominateur est $x^2-1=(x-1)(x+1)$
Les valeurs interdites sont -1 et 1.

$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}\geq 0$ équivaut à $\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x-1)(x+1)}\geq 0$

Tableau de signe de $2x^2-x-1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
2		+		+		+	
x-1		—		—	0	+	
$x+\frac{1}{2}$		—	0	+		+	
$2x^2-x-1$		+	0	—	0	+	

Tableau de signe de $x^2-1=(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x-1		—		—	0	+	
x+1		—	0	+		+	
x^2-1		+	0	—	0	+	

Tableau de signe de $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		+		+	0	—	0	+	
x^2-1		+	0	—		—	0	+	
$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$		+	||	—	0	+	||	+	

L'ensemble des solutions est donc $S=]-\infty;-[\cup[-\frac{1}{2};1[\cup]1;+\infty[$