Géométrie Vectorielle et analytique

Géométrie vectorielle

1. Définition

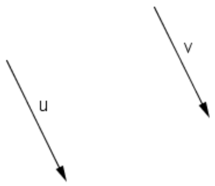
1.1 Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur ou sa norme.

- Un vecteur peut se noter avec une lettre minuscule avec une flèche au dessus, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ...
- Il ne faut pas confondre sens et direction. En effet,une droite définit une direction et une direction possède deux sens.

1.2 Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux s' ils ont même direction, même sens et même longueur.



1.3 Opposé d'un vecteur

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ de même direction et de même norme que $\vec{u}$ mais de sens opposé à $\vec{u}$

2. Vecteur défini par deux points :

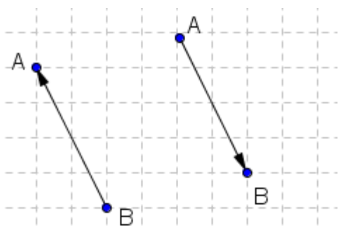
2.1 Représentation d'un vecteur

Un vecteur n'a pas d'origine déterminé : il peut prendre comme origine un point quelconque du plan.

2.2 Vecteur défini par deux points

Pour deux points distincts A et B du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par sa direction qui est la droite (AB), son sens, qui est de A vers B et sa norme qui est la distance AB.

Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$,c'est à dire $\overrightarrow{BA}$ = - $\overrightarrow{AB}$



Pour un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe un point unique B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

2.3 Vecteur nul

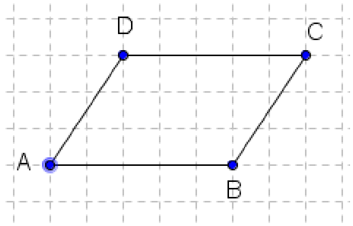
Le vecteur de norme nul est appelé vecteur nul, noté $\vec{O}$. Il n'a ni sens ni direction. Ainsi, $\overrightarrow{AA} = \vec{O}$

3. Caractérisation vectorielle

3.1 Vecteur et parallélogramme

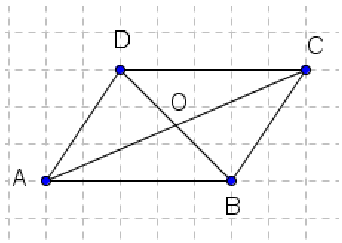
3.1.1 Rappel

ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou bien $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



3.1.2 Propriétés

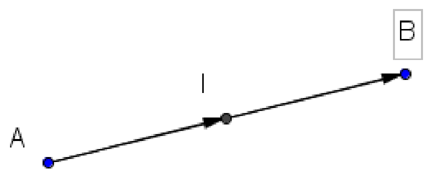
Pour quatre points quelconques A, B, C et D du plan, si ABCD est un parallélogramme, alors [AC] et [BD] ont même milieu.



Pour quatre points quelconque A, B, C et D du plan, si [AC] et [BD] ont même milieu, alors ABCD est un parallélogramme**.**

3.2 Vecteur et milieu d'un segment

I est le milieu du segment [AB] équivaut à $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$



4. Somme de deux vecteurs

4.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La somme du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ définie de la façon suivante : si A est un point quelconque, B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et C le point tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$

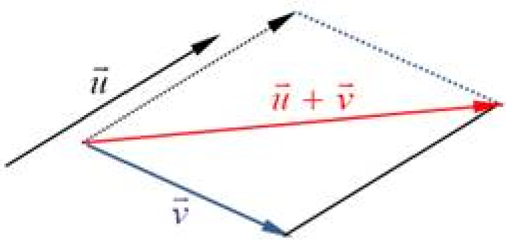
4.2 Relation de Chasles

La définition se traduit par la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette relation est appelée relation de Chasles

4.3 Construction

4.3.1 La règle du parallélogramme

On amène les origines des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en un même point (par exemple l'origine de $\vec{u}$).
On trace un parallélogramme dont les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les deux côtés. La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est alors la diagonale du parallélogramme partant de l'origine

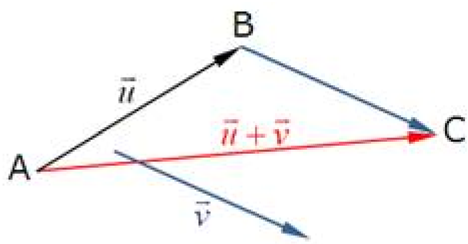


4.3.2 Méthode du triangle ou de Chasles

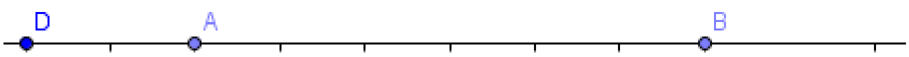
On trace le représentant de $\vec{v}$ partant de l'extrémité de $\vec{u}$. On joint l'origine de $\vec{u}$ avec l'extrémité du représentant de $\vec{v}$ que l'on vient de tracer. On obtient alors un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$

Ou encore, avec la relation de Chasles en partant de l'origine A de $\vec{v}$ on a :

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Exercice : *(AB) est une droite , C et D sont des points sur la droite (voir figure)*



Placer les points C et E tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

4.3.3 Addition de plusieurs vecteurs

Pour additionner plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper certains vecteurs afin de faciliter l'utilisation de la relation de Chasles ou de trouver la somme de vecteurs opposés.

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EG} = \vec{O}$

5. Transformation d'écriture

5.1 Différence de deux vecteurs

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ est la différence des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

5.2 Réduction de somme vectorielle

A, B, C, D, E, F, G sont des points du plan. Simplifier l'écriture $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$

5.3 Écriture comme une somme ou une différence

Exemple

ABC est un triangle rectangle en B. I la hauteur issue de B. Écrire comme somme ou différence de vecteurs le vecteur $\overrightarrow{BI}$ *.*

Réponse

On a $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CB}$

6. Multiplication d'un vecteur par un réel

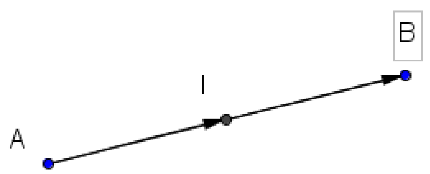
6.1 Définition

Étant donné deux points A et B du plan, le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel k est le vecteur $\overrightarrow{MN}$ défini par :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont même direction
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont même sens si k > 0
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont de sens contraire si k > 0
- MN = |k|AB

Exemple

A et B sont des points et I le milieu du segment [AB]. On a $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AI}$



Propriétés

$k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN})$

$k\,\overrightarrow{AB} + h\,\overrightarrow{AB} = (k+h)\overrightarrow{AB}$

k ($h\,\overrightarrow{AB}$) = (kh) $\overrightarrow{AB}$

En particulier

$1\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

$-1\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

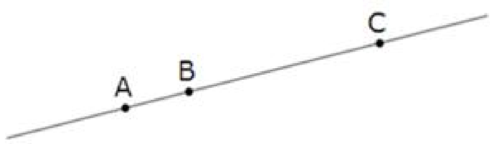
$O.\overrightarrow{AB} = \vec{O}$

6.2 Vecteurs colinéaires

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou bien $\vec{v} = k\vec{u}$. On écrit $\vec{u}$ // $\vec{v}$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires si $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{AB}$

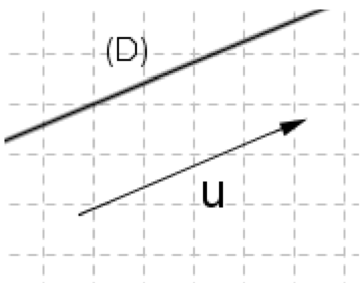
Les points A, B, C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



6.3 Vecteur directeur d'une droite

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) si $\vec{u}$ a pour direction la droite (D).

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

6.4 Vecteurs orthogonaux

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si leur direction (AB) et (CD) sont perpendiculaires