Inéquations du second degré dans IR

1. Signe de ax+b

Pourquoi est-il utile de connaître le signe de ax+b ? Factoriser une expression, c'est en fait la transformer sous la forme d'un produit où n'apparaissent que des facteurs de degré moindre. Parmi ceux-ci, on retrouve les binômes de la forme ax+b.
Par exemple, la forme factorisée de x^2-4 est (x-2)(x+2). Connaître les signes de x-2 et x+2 permet de connaître le signe de (x-2)(x+2), d'où l'utilité de ce qui va suivre.

En utilisant les résultats de l'étude des fonctions affines en troisième, on a :

Si a est positif (a>0), c'est-à-dire a a un signe +, alors le tableau de signe du binôme ax+b est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
a x + b		-	0	+	

Si a est négatif (a<0), c'est-à-dire a a un signe -, alors le tableau de signe du binôme ax+b est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
a x + b		+	0	-	

Exemples :

- Dresser le tableau de signe de 2x+5.

2x+5 =0, 2x = -5, x = $-\frac{5}{2}$. On est dans le cas a > 0.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
2 x + 5		-	0	+	

Si x = - 5, 2 (-5) + 5 = - 5; et si x = 3, 2 (3) + 5 = 11. On voit que si x change, 2x+5 change de signe.

- Dresser le tableau de signe de x^2-4.

$x^2 - 4 = 0$, si x = - 2 ou x = 2.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x+2		-	0	+		+	
x-2		-		-	0	+	
(x-2)(x+2)		+	0	-	0	+	

2. Signe de $ax^2 + bx + c$

Pour étudier le signe de $ax^2 + bx + c$, on peut utiliser sa forme canonique ou utiliser le discriminant.

2.1 Utilisation de la forme canonique à partir d’exemples

Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de chaque trinôme :

$T_1(x) = 2x^2 + x + 1$, $T_2(x) = -4x^2 + 4x - 1$ et $T_3(x) = -2x^2 + x + 3$.

- Écrivons $T_1(x)$ sous forme canonique : $T_1(x) = 2\,[(x+\alpha)^2 + \beta]$ avec $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{T_1(-\alpha)}{a}$,

Après calcul, on trouve: $T_1(x) = 2[(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}]$. C’est une expression positive car $(x+\frac{1}{4})^2 > 0$ pour toutes valeurs de x et la somme de deux nombres positives est positive.

Ainsi, pour tout réel x, $T_1(x) > 0$.

- Écrivons $T_2(x)$ sous forme canonique : $T_2(x) = -4\,[(x+\alpha)^2 + \beta]$ avec $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{T_2(-\alpha)}{a}$.

Après calcul, on trouve $T_2(x) = -4(x-\frac{1}{2})^2$ et $S =]-\infty ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$

- Écrivons $T_3(x)$ sous forme canonique :

$$T_3(x) = -2[x^2 - \frac{x}{2}] = -2[(x-\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 - \frac{3}{2}] = -2[(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{25}{16}]$$

On peut factoriser $T_3(x)$: après calcul $T_3(x) = -2(x+1)(x-\frac{3}{2})$ et on peut dresser son tableau de signe :

x	$-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
-2	-		-		-
$x+1$	-	0	+		+
$x-\frac{3}{2}$	-		-	0	+
$T_3(x)$	-	0	+	0	-

2.2 Utilisation du discriminant

Soit $T(x) = ax^2+bx+c$. La forme canonique de T(x) est $T(x) = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$.

Si on pose $\Delta = b^2 - 4ac$, on a trois cas à envisager.

- $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser T(x), T(x) a le même signe que a ;
- $\Delta = 0$, $T(x) = a[(x+\frac{b}{2a})^2]$, T(x) a même signe que (a) ;
- $\Delta > 0$, on calcule les racines x’ et x’’ (solutions de T(x) = 0).

- T(x) = a (x-x') (x-x'') et T(x) a le même signe que a à l'extérieur de x' et x'', et du signe contraire à a entre x' et x''.

Pour dresser le tableau de signe de ax²+bx+c, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser T(x), T(x) a même signe que a. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
T(x)	Signe de (a)	

- $\Delta = 0$, $T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2]$ T(x) a même signe que a. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
T(x)	Signe de (a)	0	Signe de (a)

- $\Delta > 0$, on calcule $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

  T(x) = a (x - x') (x - x'') et on a le tableau de signe suivant (on suppose x'< x'') :

x	$-\infty$	x'		x''		$+\infty$
T(x)	Signe de (a)	0	Signe de (- a)	0	Signe de (a)	

3. Inéquation du second degré dans IR

3.1 Définition

Une « inéquation du second degré à une inconnue » est une inéquation qui peut se mettre sous l'une des quatre formes suivantes :

- ax² + bx + c > 0 ;
- ax² + bx + c ≥ 0 ;
- ax² + bx + c < 0 ou
- ax² + bx + c ≤ 0

avec a ≠ 0

3.2 Résolution

Pour résoudre une telle inéquation :

- On dresse le tableau de signe de ax² + bx +c
- On hachure les colonnes avec les signes inutiles
- On écrit l'ensemble des solutions sous forme de réunion d'intervalles

Exemples :

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $-2x^2 - x + 10 > 0$ b) $4x^2 + 28x + 49 > 0$ c) $3x^2 - 2x + 5 > 0$

Réponses :

a) Résolution de $-2x^2 - x + 10 > 0$

Dressons le tableau de signe de $T(x) = -2x^2 - x + 10$. Ici, a = -2, b = -1 et c = 10.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 10 = 81 = 9^2$

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{81}}{2(-2)} = 2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{81}}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		2		$+\infty$
T(x)		-	0	+	0	-	

L'ensemble des solutions est : $S = \left]-\frac{5}{2}; 2\right[$.

b) Résolution de $4x^2 + 28x + 49 > 0$

Ici, a = 4, b = 28 et c = 49. Après calcul, on trouve $\Delta = 0$.

$T(x) = (2x+7)^2 = 2\left(x+\frac{7}{2}\right)^2$. T(x) a même signe que a qui est positif :

$$S = \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right[\cup \left]-\frac{7}{2}; +\infty\right[\quad .$$

c) Résolution de $3x^2 - 2x + 5 > 0$

Après calcul, on trouve $\Delta = -56$. $\Delta < 0$. T(x) est du signe de a qui est positif :

$$S =]-\infty; +\infty[\quad .$$