Signe d'un trinôme

Étudier le signe d'un trinôme du second degré, c'est voir dans quel intervalle il est positif et dans quel intervalle il est négatif.

Pour cela, on met le trinôme en facteur, si c'est possible, puis on dresse le tableau de signe en appliquant les règles suivants :

- ax+b = 0 si $x=-\frac{b}{a}$

- si a> 0, ax+b > 0 si $x>-\frac{b}{a}$ et ax+b <0 si $x<-\frac{b}{a}$

  Ce qu'on consigne dans le tableau suivant

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax+b		$-$	0	$+$	

- si a> 0, ax+b > 0 si $x>-\frac{b}{a}$ et ax+b < 0 si $x<-\frac{b}{a}$

  Ce qu'on consigne dans le tableau suivant

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax+b		$+$	0	$-$	

Exemples

◆Étudier le signe de f(x) = 2x +1

- 2x+1 = 0 si $x=-\frac{1}{2}$

- : Comme 2 > 0, 2x+1 > 0 si $x>-\frac{1}{2}$ et 2x+1 < 0 si $x<-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x+1		$-$	0	$+$	

◆Étudier le signe de f(x) = -3x +5

- -3x + 5 = 0 si $x=\frac{5}{3}$

• : Comme -3 < 0, -3x+5 > 0 si $x<\frac{5}{3}$ et -3 x+5 < 0 si $x<\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
- 3x+5		+	0	−	

◆ Étudier le signe de $f(x)=2x^2+4x-6$

$\Delta=4^2-4x2x(-6)=64=8^2$.

• On a donc deux racines distinctes $x'=\frac{-4-8}{2x2}=-3$ et $x''=\frac{-4+8}{2x2}=1$

• La forme factorisée de f(x) est $f(x)=2(x-1)(x+3)$

• f(x)= 0 si x = 1 ou x = -3

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
2		+		+		+	
x-1		−		−	0	+	
x+3		−	0	+		+	
f(x)		+	0	−	0	+	

Ce qui signifie que

• si $x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$, f(x) >0

• et si $x\in]-3;1[$, f(x) <0.

Ainsi, sans les calculer, on peut affirmer que f(-4) > 0, f(0) < 0, f(-1)< 0, f(1) = 0 et f(2) > 0.

◆ Étudier le signe de $f(x)=-3x^2+4x-1$

$\Delta=4^2-4x(-3)x(-1)=4$

• On a donc deux racines distinctes $x'=\frac{-4-2}{2x(-3)}=1$ et $x''=\frac{-4+2}{2x(-3)}=\frac{1}{3}$

• La forme factorisée de f(x) est $f(x)=-3(x-1)(x-\frac{1}{3})$

f(x)= 0 si x = 1 ou $x=\frac{1}{3}$

• f(x) peut s'écrire $f(x)=(x-1)(-3x+1)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
x-1		−	|	−	0	+	
-3x+1		+	0	−	|	−	
f(x)		−	0	+	0	−	

◆ Étudier le signe de $f(x)=x^2-6x+9$

$$\Delta=6^2-4x(1)x(6)=0$$

• Ainsi, on a une racine double $x'=x''=\frac{-(-6)}{2x1}=3$

• La forme factorisée de f(x) est $f(x)=(x-3)^2$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$(x-3)^2$		+	0	+	

Ainsi, f(3)=0, et f(x) > 0 quel que soit le réel x différent de 3.

◆ Étudier le signe de $f(x)=-x^2+x-1$

$\Delta=1^2-4x(-1)x(-1)=-3<0$.

On n'a aucune racine. En d'autres termes, cela signifie qu'il n'existe aucune valeur de x telle que f(x)=0, ou encore, $f(x)\neq0$ quel que soit le réel x.

D'après le cours, f(x) est du signe de a. Et comme a = -1 < 0, f(x) < 0 quel que soit le réel x.

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		−	