Séquence 1 : Droites dans le plan

1. Équation cartésienne d’une droite :

1.1 Droite définie par deux points

Le plan est muni d’un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

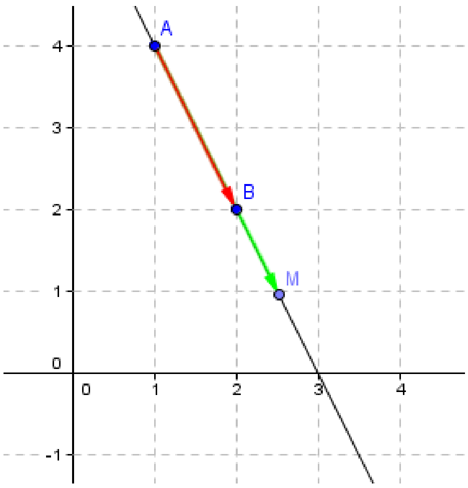
Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points distincts du plan et M(x ; y) un point quelconque de ce plan.

Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les point A, B, M sont alignés ; donc si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

En d’autres termes , (AB) est l’ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

La droite (AB) est définie par (AB) = { M(x ; y) / $\vec{AM}$ // $\vec{AB}$ } .

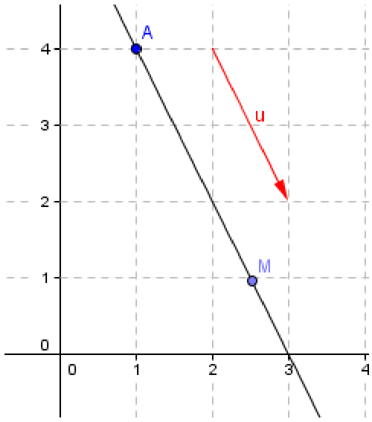
Le vecteur $\vec{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB) .



1.2 Droite définie par un point et un vecteur :

Soit A(x_A ; y_A) et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de ce plan . Soit (D) la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.

(D) est l’ensemble des points M tel que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : (D) = { M(x ; y)/ $\vec{AM}$ // $\vec{u}$ }



1.3 Équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$). Soit (D) une droite de ce plan.

Un point M(x y) appartient à la droite (D) si les coordonnées (x ; y) de M sont liées par une relation de la forme ax + by + c = 0 , où a et b ne sont pas simultanément nuls.

Cette relation est appelée équation cartésienne de (D)

Réciproquement :

Soit (E) = { M(x ; y) / ax + by + c = 0 }.

(E) est la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ où a et b ne sont pas simultanément nuls.

Exemples :

- 2x -3y+ 4 = 0 est l'équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
- -x +4y + 3 = 0 est l'équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

1.4 Détermination de l'équation cartésienne d'une droite

Soit (D) la droite passant par A (x_A ; y_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

M (x,y) appartient à cette droite si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires .

Les composantes de $\vec{AM}$ sont : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$.

Donc M (x , y) appartient à cette droite si β (x – x_A) - α (y – y_A) = 0 .

En développant , on obtient l'équation de la forme ax + by + c = 0.

Si la droite passe par deux points A et B, on prend comme vecteur directeur le vecteur $\vec{AB}$.

Exemple :

Soient A(1; 3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et M (x,y).

On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$

Le point M(x ; y) appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ si 2(x-1) – 3(y-3) = 0

En développant , on trouve (D) : 2x-3y +7 = 0

Soit (D) la droite passant par A (x_A ; y_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. L'équation de (D) est de la forme ax + by + c = 0, avec a = β et b = - α.

De plus, les cordonnées de A vérifient l'équation . Ainsi, on obtient c en remplaçant x par x_A et y par y_B, et on a alors l'équation de la droite.

Reprenons le même exemple (D) : ax +by +c = 0 avec a = 2 et b =- 3. En remplaçant x par 1 et y par 3 , on obtient 2 x 1-3 x 3 + c = 0. Ce qui donne c = 7, d'où le résultat.

1.5 Vecteur normale à une droite

Soit (D) une droite.

On appelle vecteur normal à (D) tout vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de (D).

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Soit (D) une droite d'équation ax + by + c = 0. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D).

En effet, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D), et $\vec{u}.\vec{n}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=-ba+ab=0$

2. Équations réduites

2.1 Définition :

La pente d'une droite est la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des abscisses

2.2 Forme générale

L'équation réduite d'une droite est : y = ax + b où a est la pente et b l'ordonnée à l'origine. (Voir activités).

Exemple (D) : y =2x + 3

2.3 Construction

On peut dresser un tableau de valeur, mais la plus pratique c’est l’utilisation de la pente et de b.

Exemple y= 2x + 3