LOGIQUE

1. Rappels

1.1 Proposition

1.1.1 Rappel de définition

Une proposition est une phrase qui n'a qu'une seule valeur : vraie ou bien fausse

Exemples :

- 6 est un nombre pair.
- 2 est plus grand que 3

1.1.2 Négation d'une proposition

La négation de la proposition p, notée ¬ p, est la proposition qui a une valeur de vérité contraire à celle de p.

1.2 Les connecteurs logiques

1.2.1 Le connecteur « et »

Pour deux propositions p et q, la proposition p et q noté p ∧ q est la proposition qui est vraie si p et q le sont et fausse dans les autres cas. Sa table de vérité est :

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.2.2 Le connecteur « ou »

Pour deux propositions p et q, la proposition p ou q noté p v q est la proposition qui est fausse si p et q le sont et vraie dans les autres cas. sa table de vérité est:

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.2.3 Le connecteur « implique »

Pour deux propositions p et q, la proposition « si p alors q » (p implique q) notée p => q, est la proposition qui est fausse si p est vraie et q fausse, et vraie dans les autres cas. Sa table de vérité est :

p	q	p => q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Lorsque la proposition « p => q » est vraie, on dit que p est une condition suffisante pour la réalisation de q, et que q est une condition nécessaire pour la réalisation de p.

En effet, pour que q soit vraie, il suffit que p le soit, et que si p est vraie, alors « nécessairement » q est vraie.

1.2.4 Le connecteur « équivalent »

La proposition p <=> q est la proposition (p => q) ∧ (q => p). On lit « p est équivalent à q » ou bien « q équivaut à q » ou bien « p si et seulement q ».

Exercice : Dresser sa table de vérité et énoncer dans quel cas elle est vraie.

2. Réciproque d'une implication logique

La réciproque de la proposition « p => q » est la proposition « q => p »

Table de vérité

p	q	p => q	q => p
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

On voit qu'il n'y a aucune relation entre une implication et sa réciproque.

Exemple :

« Si $x > 3$ alors $x^2 > 9$ », qui peut s'écrire aussi « $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ ».

La réciproque est « $x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$ ».

3. Contraposée d'une implication logique

La contraposée de la proposition « p => q » est la proposition « ¬q => ¬p » : (si q n'est pas vraie, alors p n'est pas vraie)

Table de vérité de ¬q => ¬p

p	q	¬q	¬p	¬q => ¬p
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Table de vérité de p => q

p	q	p => q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

D'après ces tableaux, on voit que « ¬q => ¬p » est équivalente (« synonyme ») à « p => q »

Exemple

La contraposée de « *x > 5 => x > 4* » est « $x \leq 4 \Rightarrow x \leq 5$

3. Les quantificateurs

Une proposition peut dépendre d'un paramètre x, par exemple « x est positif ». Cette proposition peut être vraie ou fausse selon la valeur de x.

3.1 Quantificateur universel

Le quantificateur pour tout ou quel que soit est noté ∀x. La proposition ∀x∈ E, P(x) est vraie lorsque, pour tout x∈ E, la proposition P(x) est vraie.

Exemples :

- La proposition ∀x∈ IN, n (n + 1) est pair est une proposition vraie.
- La proposition ∀x∈ IR, $x^2 \geq 1$ est fausse . Pour la démontrer , on donne un contre-exemple ($0{,}1^2 = 0{,}01$ et $0{,}01 < 1$)

3.2 Quantificateurs existentiels

Le quantificateur il existe (au moins un) est noté ∃. La proposition ∃x∈ E, P(x) est vraie lorsqu'il existe au moins un x∈ E telle que la proposition P(x) soit vraie.

Exemples :

- La proposition « $\exists x \in IR$, $x + 3 = 0$ » est vraie.
- La proposition « $\exists x \in IR$, $x^2 < 0$ » est fausse.

Le quantificateur il existe un unique est noté $\exists!$. La proposition $\exists! x \in E$, $P(x)$ est vraie lorsqu'il existe un unique $x \in E$ telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.

3.3 Négation des quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E$, $P(x)$ » est « $\exists x \in E$, non $P(x)$ ».

La négation de « $\exists x \in E$, $P(x)$ » est « $\forall x \in E$, non $P(x)$ ».

Exemples :

- La négation de $\exists x \in IR$, $x^2 + x + 1 = 0$ est $\forall x \in IR$ $x^2 + x + 1 \neq 0$.
- La négation de $\forall x \in IR$, $x + 1 \leq 0$ est $\exists x \in IR$, $x + 1 > 0$

2. Méthodes de raisonnement

2.1 Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Lorsque « p => q » est vraie, on dit que p est une condition suffisante à q, et que q est une condition nécessaire à p.

Pour démontrer que « p => q » est vraie , on suppose que p est vraie et on utilise différentes propriétés déjà connues pour établir que q est vraie.

Exemple : Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x+3$. Montrer que f est injective.

f est injective si elle vérifie la propriété :$\forall x \in IR$, $\forall x' \in IR$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Si $f(x) = f(x')$, alors $2x + 3 = 2x' + 3$, ce qui implique $2x = 2x'$ d'où $x = x'$.

Ainsi f est injective.

2.2 Condition nécessaire et suffisante

Pour démontrer que p <=> q, on raisonne par double implication :

- On suppose d'abord que p est vraie, et on démontre que q est vraie.
- Ensuite, on suppose que q est vraie, et on démontre que q est vraie

2.3 Raisonnement par contraposée

Pour démontrer que « p => q » est vraie , on utilise la contraposée , c'est-à-dire, démontrer que « ¬ q => ¬ p » est vraie,

Exemple :

Soit n un entier naturel.

Montrons que « si n^2 est pair, alors n est pair ».

Pour la démonstration, on va montrer que la contraposée est vraie .

La proposition contraposée est « si n est impair, alors n^2 est impair ».

On suppose que n est impair : ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que n = 2k +1.

Alors $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$.

$(2k^2+2k)$ est un entier, donc $2(2k^2+2k)+1$ est impair.

Ainsi la proposition est vraie.

2.4 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p => q est vraie , on peut supposer que p et ¬ q sont toutes les deux vraies, et on cherche à obtenir une contradiction.

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que ¬ p est vraie et on cherche à obtenir une contradiction.

Exemple : Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel , alors $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme de quotient de deux entiers relatifs a et b premiers entre eux, donc $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec p g c d (a ; b) = 1

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ alors $a^2 = 2b^2$; ainsi a^2 est pair, donc a est pair (d'après l'exemple précédent) .

Mais, $2b^2 = a^2 = 4k^2$; $b^2 = 2k^2$ donc b est aussi pair, ainsi a et b sont tous les deux multiples de 2, ce qui est contradictoire à p g c d (a ; b) = 1.
L'hypothèse $\sqrt{2}$ est rationnel est fausse , donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$