Étude des fonctions circulaires

1. Définitions

Soit $x \in R$, on considère l'angle $\hat{x}$ dont la mesure en radian est x. On pose $\cos x = \cos \hat{x}$, $\sin x = \sin \hat{x}$ et $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ lorsqu'elle est définie.

On appelle fonction cosinus (respectivement sinus) l'application qui, à tout réel x, associe $\cos x$ (respectivement $\sin x$).

La fonction tangente l'application de IR - $\left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$ dans IR, qui, à tout réel différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, associe le réel $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

2. Périodicité

Soit $p \in R$ et f telle que $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$

On a $f(x+kp) = f(x)$ quel que soit $k \in Z$. Le plus petit réel p strictement positif est la période de f.

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π, et la fonction tangente est périodique de période π

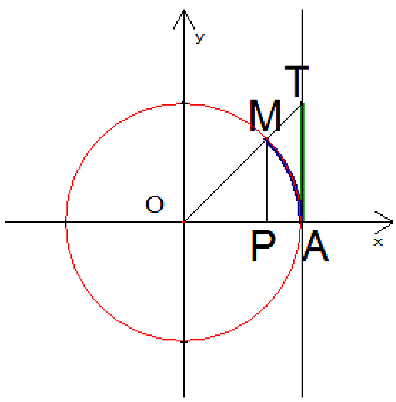
Remarque Soit $f : x \mapsto f(x) = \tan x$

f(x) n'est pas définie pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, donc n'est pas définie pour $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$

3. Continuité

On montre et on admet que, pour $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$PM \le \overline{AM} \le AT$$
$$\sin x \le R.x \le \tan x$$
$$\boxed{\sin x \le x \le \tan x}$$



Pour $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ on pose $x' = -x$

$$\sin x' \le x' \le \tan x'$$
$$\sin(-x) \le (-x) \le \tan(-x)$$
$$-\sin x \le -x \le -\tan x$$

Donc $\boxed{|\sin x| \le |x| \le |\tan x|}$ quel que soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Comme $0 \leq |\sin x| \leq |x|$, on a :

$$\lim_{x\to 0} 0 \leq \lim_{x\to 0} |\sin x| \leq \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

donc $\lim_{x\to 0} |\sin x| = 0 = \sin 0$

$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$

Ainsi, la fonction sinus est continue en 0.

De même, soit $g(x) = \cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

On a :

$x \mapsto 1$ continue

$x \mapsto \sin \frac{x}{2}$ continue

$x \mapsto \sin^2 \frac{x}{2}$ continue en 0

donc $g : x \mapsto 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$ est continue en 0

Considérons alors un point $x_0 \in R$ quelconque

Posons $f(x) = \sin x$

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,donc si et seulement si $\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

$$f(x) - f(x_0) = \sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\right|$$

car $\cos\frac{x + x_0}{2} \leq 1$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x\to x_0} 2\sin\frac{(x - x_0)}{2}$$

or sin est continue en 0

$$\lim_{x\to x_0} \sin\frac{(x - x_0)}{2} = 0$$

$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ donc f est continue en x_0

__Exemple :__

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to 100\pi} \sin x = \sin 100\pi = 0$$

La fonction sinus est donc continue sur R

Conséquence :

- $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ donc la fonction cosinus est continue sur R
- La fonction tangente est le quotient de 2 fonctions continues donc elle est continue

sur son domaine de définition $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad k \in Z$

4. Dérivabilité

Résultats importants : (limites usuelles)

Pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin x < x < \tan x$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq 1$$

D'où $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

On obtient le même résultat pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

Calcul de $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} -\sin\frac{x}{2} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

D'où $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

En appliquant ces résultats, on montre que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Rappel :
f est dérivable en x_0 si et seulement
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie ($\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *est finie*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0\cos h-\sin h\cos x_0-\sin x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sin x_0\left[\frac{\cos h-1}{h}\right]+\frac{\sin h}{h}\cos x_0\right)=c$$

$-1\leq\cos x_0\leq 1$

Donc la fonction sinus est dérivable en tout point x_0 de R et $(\sin x_0)'=\cos x_0$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x_0\cos h-\sin x_0\sin h-\cos x_0}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left[\cos\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\frac{\sin h}{h}\sin x_0\right]=$$

La fonction cosinus est dérivable en tout point x_0 de R et $(\cos x_0)'=-\sin x_0$

Théorème :

- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur R et quel que soit $x\in R$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

- La fonction tangente est dérivable sur $R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $k\in Z$ car c'est le quotient de deux

fonctions dérivables et

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

Théorème :(admis)

Si u est dérivable sur R, alors $x\mapsto\cos u(x)$ *et* $x\mapsto\sin u(x)$ sont dérivables et

$$[\cos u(x)]'=-u'(x)\sin u(x)$$

$$[\sin u(x)]'=u'(x)\cos u(x)$$

5. Variation et courbes

5.1 f(x)= cosx

- $D_f=R$
- Périodicité, f est périodique de période 2π . On va faire l'étude sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi;\pi]$

- Parité : f est paire $D_e = [0;\pi]$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
  $\lim_{x\to \pi} f(x) = -1$
- dérivabilité : f est dérivable sur D_e et $f'(x) = -\sin x$

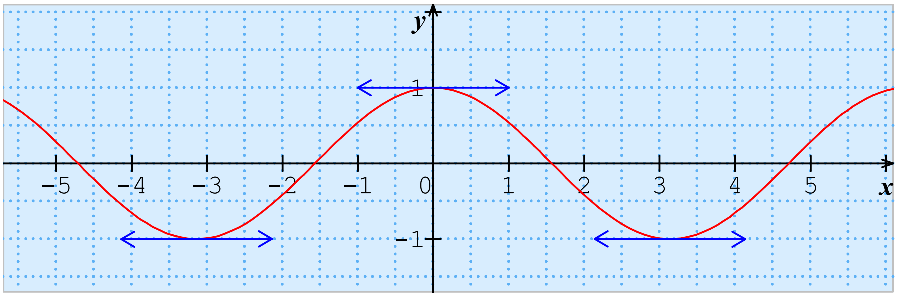
x	0		π
$-\sin x$	0		0
f(x)	1	↘	-1

Tangentes horizontales en (0,1) et $(\pi,-1)$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Courbe



5.2 f(x)= sinx

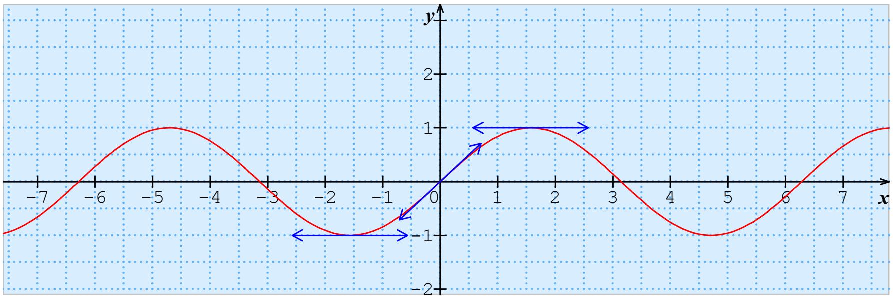
- $D_f = R$
- Périodicité, f est périodique de période 2π .
- Parité : f est impaire $D_e = [0;\pi]$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
  $\lim_{x\to \pi} f(x) = -0$
- dérivabilité : f est dérivable sur D_e et $f'(x) = \cos x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1	+	0	-	-1
f(x)	0	↗	1	↘	0

Tangentes horizontales en $(\frac{\pi}{2},1)$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi \ ou \ \ x = 0$$



5.3 f(x) = tanx

- $D_f = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in Z$
- $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -f(x)$
- f est périodique π , $D_e = \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
- f est impaire donc on peut encore réduire le domaine d'étude à $D_e = \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
  - $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale
- f est dérivable sur D_f et $f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f '(x)	1	+	‖
f (x)	0 ↗	$+\infty$	‖

f '(0)=1, donc on a une tangente de pente 1 à l'origine