Corrigé Problème 2 Bacc série S 2021

PROBLEME 2

Partie A

1 a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, d'où f est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$

f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$

2 Calcul de $f'(x)$; $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$: $f'(x) = \dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

3 a) Etude de variation de g et déduction de son signe sur $\left]-\infty;0\right[$

$g'(x) = -\dfrac{1}{x(x-1)^2}$; $g'(x) \succ 0;\ \forall x \in \left]-\infty:0\right[$. La fonction g est strictement croissante.

Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$, on a *g(x) >0* pour tout x < 0

b) Montrons que $\forall x \in \left]-\infty:0\right[;\ f'(x) = g(x)$

Pour $x \in]-\infty; 0[, f(x) = 1 + x\ln x(1 - \frac{1}{x})$

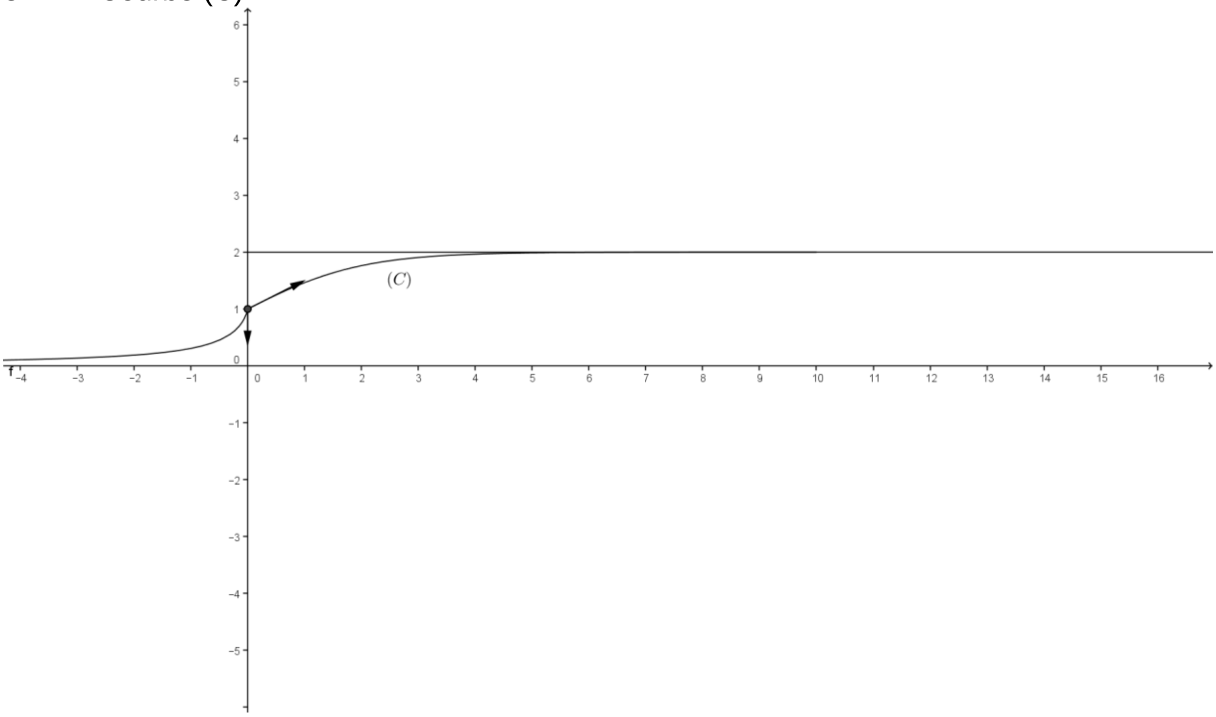
$$f'(x) = \frac{-\ln\left(x\left(-\frac{1}{x}+1\right)\right) + x\ln\left(x\left(-\frac{1}{x}+1\right)\right) + x}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = g(x)$$

4 Le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ $\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	2

5 Courbe (C)



Partie B

1. Pour tout $x \in [1;2]$ h'(x)= f '(x) -1< 0, donc h'(x) < 0, h est strictement décroissante.

h est définie, continue et strictement décroissante sur $[1;2]$, donc h réalise une bijection de $[1;2]$ vers $[-0,24;0,40]$.

De plus, $0 \in [-0,24;0,40]$, donc $\exists! \alpha \in [1;2]; h(\alpha)=0$

2. Démonstration

$1 \leq x \leq 2;$ f est strictement croissante donc $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

Or $f(1) = \frac{2}{1+e^{-1}}$ >1 et $f(2) = \frac{2}{1+e^{-2}} < 2$,donc $1 \leq f(x) \leq 2$

ainsi $f(x) \in [1;2]$

$$\forall x \in]0;+\infty[: \quad f'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$\frac{2e^{-2}}{(1+e^{-2})^2} \leq 1$; $0 \leq \frac{2e^{-2}}{(1+e^{-2})^2}$ d'où $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

3. a) Démonstration par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [1;2]$

b) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[1;2]$ pour $b = U_n$ et $a = \alpha$, on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_0 - \alpha| \quad or\ |U_0 - \alpha| \leq 1 \ .$$

D'où, par multiplication membre à membre, et après simplification, on a $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) (U_n) est convergente et converge vers α

d) $n_0 = 18$.