Branches infinies

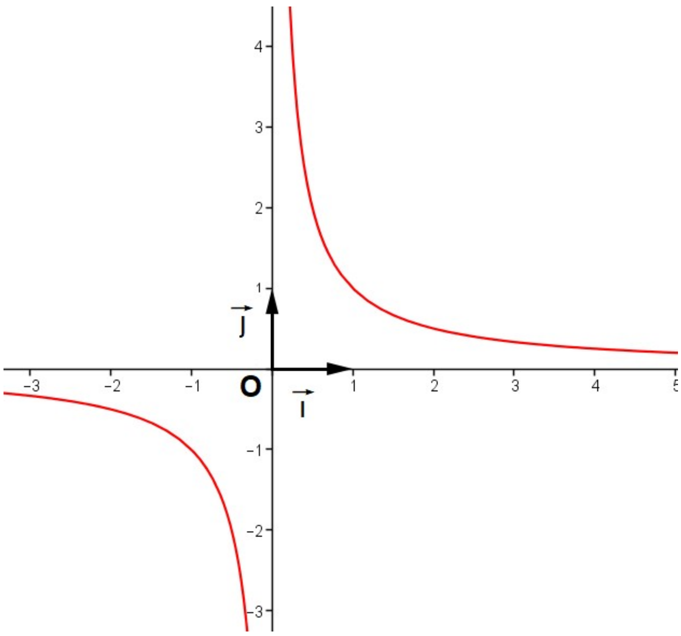
1. Fonctions homographiques $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *avec* $c\neq 0$ *et* $ad-bc\neq 0$

1[e] exemple : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

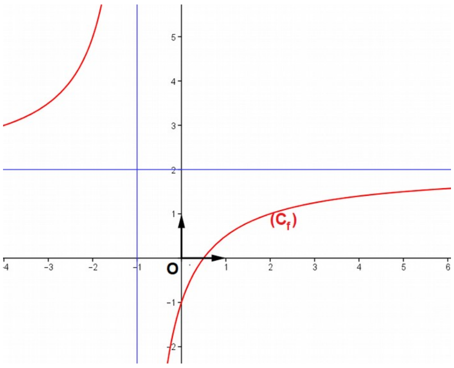
- $D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[.$
- Comme f est impaire, on peut réduire le domaine d'étude à $D_e=]0;+\infty[.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox)
- Dérivée $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
- Tableau de variation

x	0	$+\infty$
f'(x)	||	$-$
f(x)	|| $+\infty$	↘ 0

- Courbe



2e exemple : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$



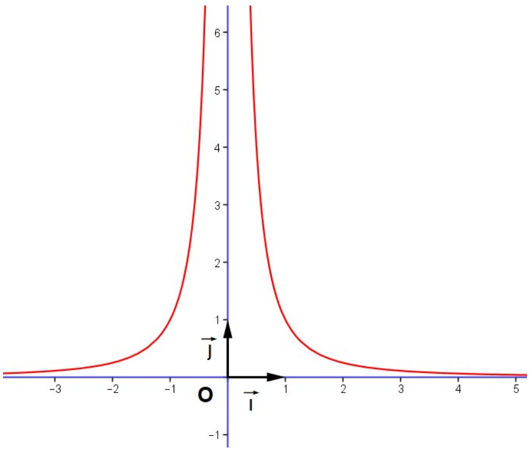
3. Fonctions du type $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ avec $a' \neq 0$

1e exemple $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

- $D =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
- Comme f est paire, on peut réduire le domaine d'étude à $D_e =]0 ; +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote.
- Dérivée $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$
- Tableau de variations

x	0	$+\infty$
f'(x)	||	—
f(x)	|| $+\infty$ ↘	0

- Courbe

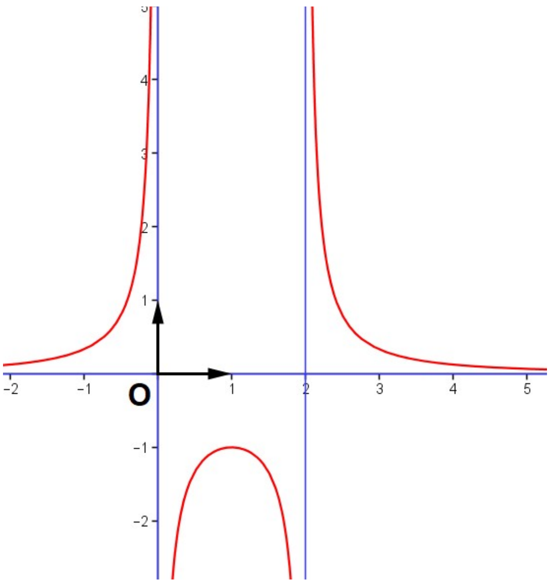


<u>2^e^ exemple</u> : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$

- $D_f =]-\infty\,;0\,[\cup]\,0\,;2\,[\cup]\,2;+\infty\,[$
- f n'est ni paire ni impaire
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale (parallèle) à (x'Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy)
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Donc la droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy).
- Dérivée : $f'(x) = -\dfrac{2(x-1)}{(x^2-2x)^2}$
- Tableau de variations :
-

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
2(x-1)		-	|	-	0	+	|	+	
$(x^2-2x)^2$		+	0	+	|	+	0	+	
f '(x)		+	||	+	0	-	||	-	
f(x)	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

- Courbe



3e exemple : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

- $D_f=]-\infty;+\infty[$
- f est paire : on va faire l'étude sur $D_f=[0;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: On a une asymptote horizontale d'équation y = 0

  $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$: On n'a pas d'asymptote en 0.
- $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
f'(x)	—	
f(x)	1 ↘	0

Courbe