Polynômes-Fractions Rationnelles

1. Calcul littéral

1.1 Règle de priorités dans les calculs

Dans une suite de calculs, on effectue d'abord la puissance, le produit ou le quotient, puis la somme ou la différence .

Exemple

Calculer l'expression A = $3^2 - \frac{2}{3} x \frac{6}{5}$

A = $9 - \frac{12}{15} = 9 - \frac{4 x 3}{5 x 3} = 9 - \frac{4}{5} = \frac{9 x 5 - 4}{5} = \frac{41}{5}$

1.2 Règle des parenthèses

Si un signe moins est devant la parenthèse , quand on enlève la parenthèse, tous les signes changent

$a - (b - c) = a - b + c$

$a + (b - c) = a + b - c$

1.3 Règle de calcul sur les produits

1.3.1 Déplacement et regroupement

on peut déplacer , regrouper certains produits

1.3.2 Développements de produits

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$3(x + 1) = 3x + 3$

$2(1 - \frac{3}{2}) = 2 - 2x \frac{3}{2} = 2 - 3 = -1$

1.3.3 Identités remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Ainsi

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2 x 1 x \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$

1.3.4 Factorisation et Développement

$ab + ac = a(b + c)$

$ab - ac = a(b + c)$

Pour factoriser,

on peut mettre en évidence des facteurs communs à chaque terme.

Utiliser les identités remarquables

Exemple

Factoriser $A(x) = 2x^2 + 3x$, $B(x) = (4x + 3)^2 - (3x + 4)^2$

On a $A(x) = 2x^2 + 3x = x(2x + 3)$

$B(x) = (4x + 3)^2 - (3x + 4)^2 = [(4x + 3) - (3x + 4)][(4x + 3) + (3x + 4)] = [4x-3x+3-4][4x+3x+3+4]$

$B(x) = (x-1)(7x+7)$

Développer $C(x) = (2x-3)(x+1)$

On a $C(x) = 2x^2 + 2x - 3x - 3 = 2x^2 - x - 3$

2. Polynômes

2.1 Monômes

Un monôme est une expression littérale de la forme ax^n où a est un réel et n un entier naturel.

a est son coefficient, x sa variable, n son degré

Exemples

$3x^2$, -4, $-x^3$ sont des monômes.

Tout nombre différent de 0 et un monôme

2.2 Polynôme

2.2.1 Définition

Un polynôme est la somme de plusieurs monômes et réduites. Ses termes sont ordonnées suivant les puissances décroissantes de x ou bien suivant les puissances croissantes.

L'exposant le plus élevé de x est le degré du polynôme.

Exemple

$A(x) = x^3 - 2x^2 - 36x + 72$ est un polynôme de degré 3. Il est ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

Soit $B(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)$. Développer ,réduire et ordonner B(x) suivant le puissances décroissantes de x.

$B(x) = x^3 - x^2 - 2x - x^2 + x + 2 = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$B(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

2.2.2 Opérations

On peut additionner, multiplier deux polynômes . On obtient toujours un polynôme

2.3 Fractions rationnelles

2.3.1 Définition

Une fraction rationnelle est le rapport de deux polynômes.

Si f(x) = $\frac{A(x)}{B(x)}$,est une fraction rationnelle, A(x) est le numérateur et B(x) le dénominateur

Une fraction rationnelle peut ne pas être définie pour certaines valeurs de x.

Exemple

f(x) = 2 x + 1 + $\frac{1}{x-2}$, en rendant au même dénominateur, on a f(x) = $\frac{(2x+1)(x-2)+1}{x-2}$

f(x) = $\frac{2x^2-3x-1}{x-2}$

2.3.2 Domaine de définition

l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle est l'ensemble des réels x qui n'annulent pas le dénominateur.

Si f(x) = $\frac{A(x)}{B(x)}$, l'ensemble de définition D_f de f est :

D_f = { $x \in$ IR / $B(x) \neq 0$ }.

Exemple

f(x) = $\frac{3x+2}{x-1}$ D_f = {x ϵ IR / x – 1 ≠ 0}

Or x – 1 ≠ 0 si x ≠ 1. D_f = IR – {1}.

2.3.3 Simplification d'une fraction rationnelle

Méthode

Déterminer le domaine de définition de la fraction.

Factoriser le numérateur et le dénominateur.

Simplifier le numérateur et le dénominateur par leur facteur commun.

Exemple

Soit F(x) = $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

a) Déterminer le domaine de définition de F

b) Donner la forme simplifiée F'(x) de F(x).

a) F est définie si $x^2 - 4 \neq 0$, si $(x - 2)(x + 2) \neq 0$

D_F = IR – {-2, 2}

b) F(x) = $\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}$ donc, pour x≠-2 et x≠2 F'(x) = $\frac{x-2}{x+2}$