Nombres réels

1. Ensemble des nombres réels

Nous savons résoudre dans $\mathbb{Q}$ les équations tels que 5x – 2 = 0, x² – 4 = 0.

5x – 2 = 0 si 5x = 2 si x = $\frac{2}{5}$

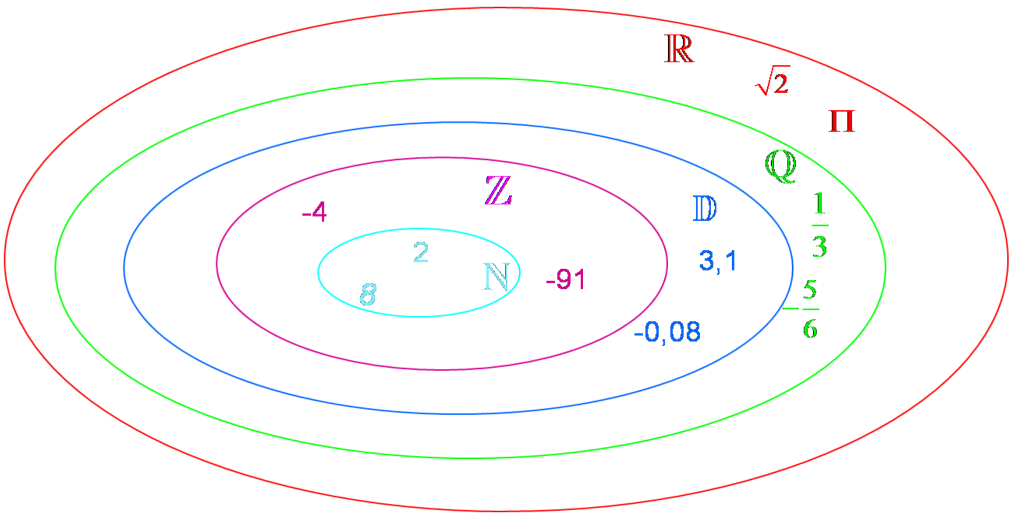
x² – 4 = O si (x – 2)(x + 2) = 0 ,si x – 2 = 0 ou x + 2 = 0, si x = -2 ou x = 2

L'équation x² - 3 = 0 n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, d'où la nécessité d'un autre ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, d'où l'existence des nombres dits nombres irrationnels.

Ainsi, $\sqrt{3}$, π sont des nombres irrationnels.

La réunion de l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels constitue l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

IR contient tous les ensembles vus dans les classes antérieures, à savoir IN, $\mathbb{Z}$, ID, $\mathbb{Q}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

est inclus dans

2. Racine carré

La formule de la surface d'un carré est = c x c = c².

Si c = 7 , S = 7² = 49. Si S = 64 = 8², c = 8

On dit que la racine carré de 64 est 8

Quelle est la raine carrée de 100 ?

100 = 10² donc la racine carrée de 100 est 10 . On écrit $\sqrt{100}=10$

2.1 Définition

La racine carrée d'un nombre réel positif a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre dont le carré est égal à a.
Le symbole $\sqrt{.}$ est appelé radical. Le réel positif a s'appelle le radicande.

$\sqrt{a}$ = b signifie b² = a or b² = $\sqrt{a}^2$ donc $\sqrt{a}^2$ = a

Exemples

3² = 9 donc $\sqrt{9}$ = 3

$\sqrt{2}^2$ = 2

2.2 Propriétés

Soient a et b deux nombres réels positifs, alors :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (avec $b \neq 0$)
- $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$
- ***Attention*** **:** $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Exemples

- $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ mais $\sqrt{1} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$
- $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ mais $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ le nombre $\sqrt{8}$, $\sqrt{125}$

On 8 = 2^3 = 2x2² donc $\sqrt{8}$ = $\sqrt{2x2^2}$ = $2\sqrt{2}$

De même $\sqrt{125}$ = $5\sqrt{5}$

2.3 Rendre rationnel le dénominateur

On ne peut pas laisser un radical au dénominateur d'une fraction

Méthode 1 : Le dénominateur est un produit ayant pour facteur $\sqrt{a}$ (avec a positif) :

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$, et on utilise la règle $(\sqrt{a})^2 = a$.

Méthode 2 : Le dénominateur est une somme dont les termes contiennent une racine carrée :

Si le dénominateur s'écrit $a+\sqrt{b}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a-\sqrt{b}$.

Si le dénominateur s'écrit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Exemples

Écrire les nombres suivants sous forme de fractions sans radical au dénominateur.

$a = \frac{2}{3\sqrt{5}}$ $b = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ $c = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Réponse

$$a = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}x\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$b = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{7-4\sqrt{3}}{4-3} = 7-4\sqrt{3}$$

$$c = \frac{1(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

3. Distance et valeur absolue

3.1 Distance

La distance entre deux nombres réels x et y est la différence entre le plus grand nombre et le petit nombre. Cette distance est notée |x - y| et se lit « valeur absolue de x - y ». On la note aussi d(x ; y).

3.2 Valeur absolue

3.2.1 Définition

La valeur absolue de x est la distance entre x et 0.

Si x est plus grand que 0, $d(x\,;0)=x-0=x$ et si x est plus petit que 0, $d(x\,;0)=0-x=-x$.

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ -x & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$$

Exemples

$|13| = 13$, $|-2| = 2$, $|10^{-3}| = 10^{-3}$.

3.2.2 Propriétés

- Pour tout réel x, |x| = 0 si et seulement si x = 0
- Pour tout réel x, |-x| = |x|
- Pour tous réels x et y, |x y| = |x| |y|
- Pour tous réels x et y, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=|x|$
- Pour tout réel x et a>0, |x| = a si et seulement si x = - a ou x = a
- Pour tout réel x et a>0, $|x|\leq a$ si et seulement si $-a\leq x\leq a$

4. Intervalles de IR

4.1.1 Vocabulaires

Soient a et b deux nombres réels tels que a ≤ b.

a : borne inférieure et b borne supérieure

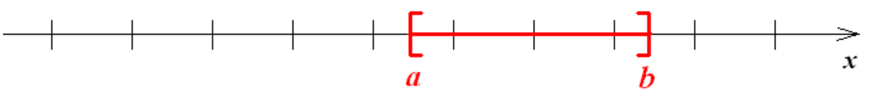
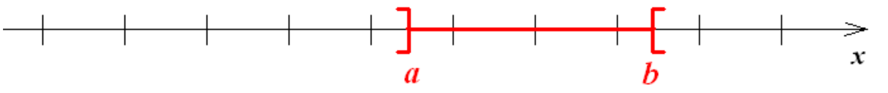
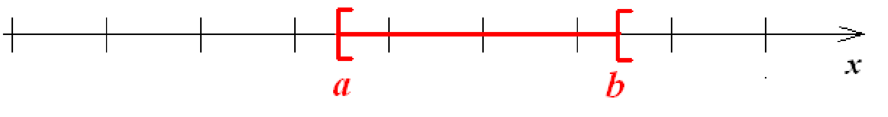
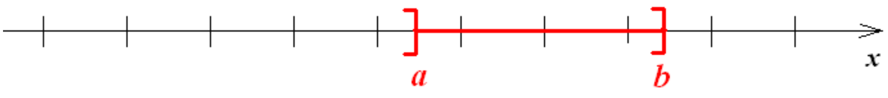
Symboles < et > : inégalité strictes

Symboles ≤ et ≥ : inégalités larges

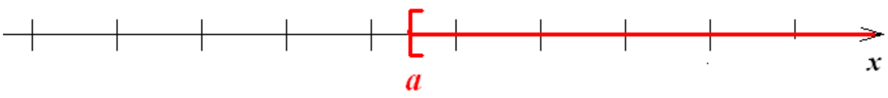
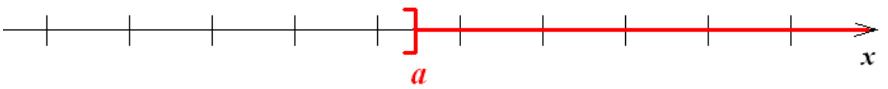
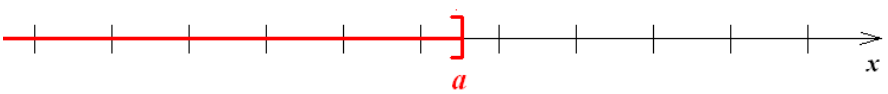
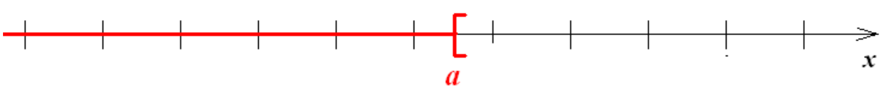
4.1.2 Différents types d’intervalles

Soient a et b deux nombres réels tels que a ≤ b. Il existe huit types d’intervalles.

a) Intervalles bornés

Type	ensemble	Représentation
[a ; b]	$a \leq x \leq b$	
] a ; b [	$a < x < b$	
[a ; b [	$a \leq x < b$	
] a; b]	$a < x \leq b$	

b) Intervalles non bornés

$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;a]$	$x \leq a$	
$]-\infty;a[$	$x < a$	

$\mathbb{R}$ est un intervalle non borné ouvert :

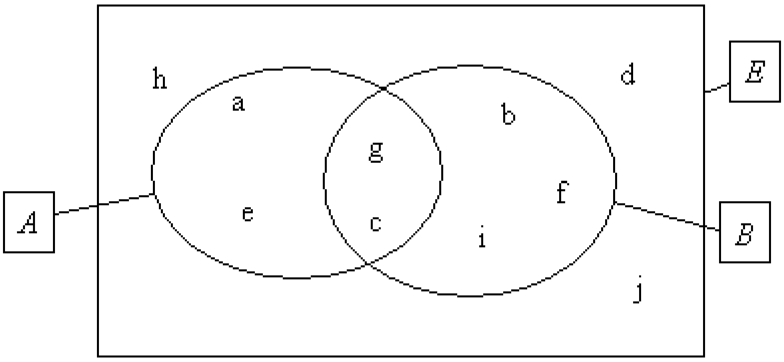
$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$;

$\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$;

$\mathbb{R}_- =]-\infty ; 0]$

4.1.3 Réunion et intersection d'intervalles

a) Réunion de deux ensembles



La réunion de l'ensemble A et de l'ensemble B, est notée AUB

AUB = { x/ x ϵ A ou x ϵ B }

Exemple

Si A =] -3 ; 0], B = [-1 ; 4[, alors AUB =]-3 ; 4[

b) Intersection de deux ensembles

L'intersection de l'ensemble A et de l'ensemble B, est notée $A \cap B$

$A \cap B$ = { x/ x ϵ A et x ϵ B }

Exemple

Si A =] -3 ; 0], B = [-1 ; 4[, alors $A \cap B$ ={-1 ; 0]

5. Comparaison de nombres réels

5.1 Inégalités et opérations

5.1.1 Inégalités et addition

a, b, c, d sont des nombres réels.

on peut ajouter un même nombre aux deux termes d'une inégalité sans en changer le sens

a < b équivaut à a + c < b + c

a ≤ b équivaut à a + c ≤ b + c

On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens sans en changer le sens

a < b et c < d alors a+c < b+d

a ≤ b et c ≤ d alors a +c ≤ b+d

5.1.2 Inégalités et multiplication

a, b, c, sont des nombres réels.

Si c est positif

a < b équivaut à a x c < b x c

a ≤ b équivaut à a x c ≤ b x c

Ainsi

2 < 3 alors 2 x5< 3 x5 ou encore 10 < 15

Si c est négatif

a < b alors $axc > bxc$

a ≤ b alors $axc \geq bxc$

Exemple

5 ≤ 7 alors 5(-4) ≥ 7(-4) ou encore -20 ≥ -28

5.2 Comparaison de réels

5.2.1 Comparaison des carrés

a et b sont des réels positifs

si a < b alors $a^2 < b^2$

Si a ≤ b alors $a^2 \leq b^2$

Pour comparer deux réels positifs, on peut comparer leurs carrés

Exemple

Comparer 9 et $5\sqrt{3}$.

On a $9^2 = 81$ et $5\sqrt{3}^2$ = 75 . Donc $5\sqrt{3}$ < 9

5.2.2 Comparaison des racines carrés

si a < b alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Si a ≤ b alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$

Exemple

2 < 3 alors $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

5.2.3 Comparaison des inverses

Deux nombres de même signe et différents de 0 sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse

si a < b alors $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

Pour comparer deux nombres différents de O, on peut comparer leurs inverses

6. Encadrements

Encadrer un nombre *x*, c'est trouver deux nombres *a* et *b* tels que *a* < *x* < *b*.

6.1 Encadrement d'une somme ou d'un différence

Si a ≤ x ≤ b et a' ≤ x' ≤ b', alors a + a' ≤ x + x' ≤ b + b'

Si a ≤ x ≤ b et a' ≤ x' ≤ b', alors -b' ≤ -x' ≤ -a', donc a - b' ≤ x - x' ≤ b - a'

Exemple

Sachant que 1,41≤ $\sqrt{2}$ ≤ *1,42,* encadrer 1 + $\sqrt{2}$ et 1 - $\sqrt{2}$

1,41≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42,alors , 1+1,41≤ 1+ $\sqrt{2}$ ≤ 1+1,42, c'est-à-dire 2,41≤ 1+ $\sqrt{2}$ ≤ 2,42

1,41≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42,alors , -1,4 ≤ - $\sqrt{2}$ ≤ -1,41, donc 1-1,4 ≤ 1 - $\sqrt{2}$ ≤ 1-1,41

c'est-à-dire -0,42 ≤ 1 - $\sqrt{2}$ ≤ - 0,41

6.2 Encadrement d'un produit

Exemple

Sachant que 1,73 ≤ $\sqrt{3}$ ≤ 1,74 et 3,14 ≤ π ≤ 3,15, encadrer $\pi\sqrt{3}$

On a 1,73 ≤ $\sqrt{3}$ ≤ 1,74 et 3,14 ≤ π ≤ 3,15, alors 1,73x3,14 ≤ $\pi\sqrt{3}$ ≤ 1,74 x3,14 et •••

6.3 Encadrement d'un quotient

Exemple

Sachant que 1,41≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42 et 1,73 ≤ $\sqrt{3}$ ≤ 1,74, encadrer $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

On a1,41≤ $\sqrt{2}$ ≤ 1,42 , donc $\frac{1}{1{,}42}$ ≤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ≤ $\frac{1}{1{,}41}$ et 1,73 ≤ $\sqrt{3}$ ≤ 1,74, alors

1,73x $\frac{1}{1{,}42}$ ≤ $\sqrt{3}$ x $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ≤ 1,74x $\frac{1}{1{,}41}$, c'est-à-dire •••

7. Puissance d'un nombre

7.1 Définition

Si a est un nombre et n un entier naturel non nul, on appelle puissance n-ième de a, le nombre

$a^n = \underbrace{axaxax\cdots xa}_{n\,termes}$. On pose, pour a ≠ 0, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Par convention, on pose $a^0 = 1$, pour tout nombre a non nul.

Exemples

2^3 = 2x2x2 = 8

$3^{-4} = \frac{1}{3x3x3x3} = \frac{1}{81}$

7.2 Propriétés

Si a et b sont des nombres et n et m des entiers relatifs, alors

- $a^{n} \times a^{m} = a^{n+m}$
- $a^{n} \times b^{n} = (a \times b)^{n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$
- $\frac{a^{n}}{b^{m}} = a^{n-m}$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $(a^{n})^{m} = a^{n \times m}$

Exemples

$2^{3} \times 2^{2} = 2^{5} = 32$; $5^{7} \times 5^{-4} = 5^{3} = 125$; $(2^{5})^{3} = 2^{5\ 3} = 2^{15}$

7.3 Puissance de 10

et corps mot **rouge**

et

Exemple corps cadre Jaune

Corps de texte

Exemple corps cadre Vert

Corps de texte

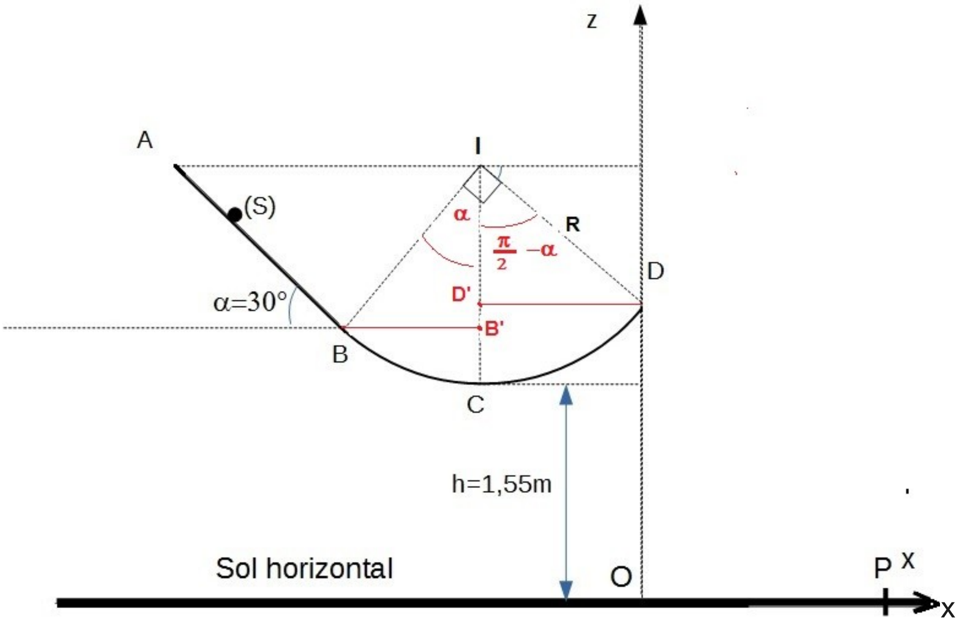
Exemple Corps CADRE Gris

(exemple sur 2 lignes)

fghhf

Exemple de puces :

- puce 1
- puce 2



Legende Figure

x

$$v_B=\sqrt{\left(\frac{2.Ec(B)}{m}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2.0,39}{0,05}\right)}=3,95\,ms^{-1}.$$

$$\boxed{v_B=\sqrt{\left(\frac{2.Ec(B)}{m}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2.0,39}{0,05}\right)}=3,95\,ms^{-1}.}$$

Exemple tableau : PAS DE STYLE = A COPIER COLLER

test	bla				
bla	bla				