NOMBRES DECIMAUX

1 Puissance de 10

1.1 Définition

n étant un nombre entier naturel, 10^{-n} est l'inverse de 10^n

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} \qquad\qquad 10^n \times 10^{-n} = 1$$

Remarque :

- Si n est un nombre entier naturel, alors $10^n = 10 \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .}_{n \text{ zéros}}0$:
- Si n est un nombre entier naturel, alors $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}0\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .}_{(n-1) \text{ zéros suivi du chiffre } 1}1$:

Exemple : $10^7 = 10\,000\,000$; $10^{-7} = 0{,}000\,000\,1$

1.2 Propriétés

n et p sont des nombres entiers relatifs :

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p} \qquad (10^n)^p = 10^{n \times p} \qquad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$$

2 Nombres décimaux et puissance de 10

2.1 Ecriture d'un nombre décimal sous la forme $a \times 10^p$

Chaque nombre décimal relatif peut s'écrire de diverses façons sous la forme $a \times 10^p$

Exemple : 3,14 peut s'écrire indifféremment :

$31{,}4 \times 10^{-1}$; 314×10^{-2} ; $0{,}314 \times 10^{1}$; $0{,}0314 \times 10^{2}$

Propriétés

a et b sont des nombres relatifs non nuls, p et q sont des entiers relatifs.

$$(a \times 10^p) \times (b \times 10^q) = (a \times b) \times 10^{p+q}$$

2.2 Notation scientifique d'un nombre décimal

On appelle notation scientifique d'un nombre décimal x l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p est un nombre entier relatif.

Exemple : la distance de la terre à la lune est de 384 400 km ; il est souvent plus commode d'écrire cette distance en notation scientifique : $3{,}844 \times 10^5$

2.3 Nombre décimaux d'ordre n

n est un nombre entier naturel.

On appelle nombre décimal d'ordre n un nombre décimal qui peut être écrit sous la forme d'un produit d'un nombre entier relatif par 10^{-n}.

Un nombre décimal écrit avec n chiffre après la virgule est un nombre décimal d'ordre n.

Exemple :

$-1{,}5$ est un nombre décimal d'ordre 1

1,52 est un nombre décimal d'ordre 2

$-1{,}524$ est un nombre décimal d'ordre 3

3 Approximation décimale d'un nombre

3.1 Troncature d'un nombre

On appelle troncature à n décimal du nombre x le nombre décimal d'ordre n obtenu en ne conservant que les n premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale de x.

Exemple :

La troncature à une décimale de 3,428 578 est 3,4

La troncature à deux décimales de 3,428 578 est 3,42

La troncature à trois décimales de 3,428 578 est 3,428

3.2 Approximation décimale d'un nombre

3.2.1 Nombre décimaux consécutifs d'ordre n

Exemples

- 3,1 et 3,2 sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1
- 3,14 et 3,15 sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2
- 3,142 et 3,143 sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 3
- ……

3.2.2 Encadrement d'un nombre rationnel par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre n

Soit à encadrer le nombre rationnel $\frac{22}{7}$.

Avec une calculatrice, on a : $\frac{22}{7} = 3{,}142857143$

- L'encadrement de $\frac{22}{7}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 0 est $3 < \frac{22}{7} < 4$
- L'encadrement de $\frac{22}{7}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 est $3{,}1 < \frac{22}{7} < 3{,}2$
- L'encadrement de $\frac{22}{7}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 est $3{,}14 < \frac{22}{7} < 3{,}15$
- L'encadrement de $\frac{22}{7}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 3 est $3{,}142 < \frac{22}{7} < 3{,}143$
- ……

3.2.3 Approximation décimale d'ordre n

On a $3{,}14 < \frac{22}{7} < 3{,}15$, alors :

- 3,14 est ***l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut*** de $\frac{22}{7}$
- 3,15 est ***l'approximation décimale d'ordre 2 par*** excès de $\frac{22}{7}$

Plus généralement, pour trouver les approximations décimales d'ordre n d'un nombre décimal x, on peut procéder comme suit :

- On cherche un encadrement de x par deux nombres décimaux d'ordre n
- Le plus petit de ces deux nombres est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de x
- Le plus grand de ces deux nombres est l'approximation décimale d'ordre n par excès de x

3.3 Arrondi d'ordre n d'un nombre positif

Pour trouver l'arrondi d'ordre n de la fraction $\frac{a}{b}$, on calcule le quotient q de la division de a par b avec (n+1) chiffre après la virgule.

- Si le $(n+1)^e$ chiffre après la virgule est : $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ou\ 4$, l'arrondi d'ordre n de $\frac{a}{b}$ est l'approximation décimale d'ordre n par défaut.
- Si le $(n+1)^e$ chiffre après la virgule est : $5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ou\ 9$, l'arrondi d'ordre n de $\frac{a}{b}$ est l'approximation décimale d'ordre n par excès.

Exemple :

On a $\frac{22}{7} = 3{,}142857142$

- L'arrondi d'ordre 2 de $\frac{22}{7}$ est 3,14 car le 3ème chiffre après la virgule est 2. $(2 < 5)$
- L'arrondi d'ordre 3 de $\frac{22}{7}$ est 3,143 car le 4ème chiffre après la virgule est 8 (8×5)