Équations avec valeurs absolues

1er exemple

Résoudre l'équation $|x^2+2x|=0$

On a $|x^2+2x|=0$ si et seulement si $x^2+2x=0$

Or $x^2+2x=0$ si et seulement si x(x+2)=0, donc si et seulement si x = 0 ou x = -2

L'ensemble des solutions est donc $S=\{-2;0\}$

2e exemple

Résoudre $x^2+|x|=0$

1ère méthode

On sait que $|x|^2=x^2$, donc l'équation est équivalente à $|x|^2+|x|=0$

ou $|x|(|x|+1)=0$. Ce qui équivaut à $|x|=0$ ou $|x|=-1$

$|x|\geq 0$ quel que soit x , donc l'équation $|x|=-1$ n'admet aucune solution ;

Ainsi la seule solution est 0

et $S=\{0\}$

2ème méthode

Ecrivons l'équation sans le symbole de valeur absolue

On sait qu si $x\geq 0$ alors $|x|=x$ et si $x\leq 0$ alors $|x|=-x$

On va consigner ces résultats dans un tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$\|x\|$	$-x$	0	x
$x^2+\|x\|$	x^2-x	0	x^2+x

On cherche alors les solutions dans $]-\infty;0]$ puis celles dans $]0;+\infty[$

Dans $]-\infty;0]$ l'équation est $x^2-x=0$, ce qui équivaut à x(x-1)=0 avec $x\leq 0$

Donc x =0 ou x =1. Or x doit être négatif, donc la solution est x = 0

Dans $]0;+\infty[$, l''équation est $x^2+x=0$; avec x > 0.

$x^2+x=0$ équivaut à $x(x+1)=0$

Ce qui équivaut à x = ou x = -1. Or x doit être strictement positif, don il n'existe aucune solution dans $]0;+\infty[$

Alors $S=\{0\}$

3e exemple

Soit à résoudre $|x^2-1|-|x-2|=0$

Ecrivons l'équation sans les symboles de valeur absolue

x	$-\infty$ -1	1	2	$+\infty$
x^2-1	+ 0	− 0	+	+
$\|x^2-1\|$	x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1	x^2-1
$x-2$	−	−	− 0	+
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$
$\|x^2-1\|-\|x-2\|$	x^2-x+1	$-x^2-x+3$	x^2-x+1	x^2+x-3

Ainsi :

- sur $]-\infty;-1]$, l'équation s'écrit $x^2-x+1=0$
- sur $[-1;1]$, l'équation s'écrit $-x^2-x+3=0$
- sur $]1;2]$, l'équation s'écrit $x^2-x+1=0$
- et sur $]2;+\infty[$, l'équation s'écrit $x^2+x-3=0$
-

Résolvons l'équation sur chacun de ces intervalles :

- Sur $]-\infty;-1]$, l'équation est $x^2-x+1=0$

$\Delta=(-1)^2-4.1=-3<0$, donc on n'a aucune solution dans cet intervalle

- Sur $[-1;1]$, l'équation est $-x^2-x+3=0$ $\Delta=(-1)^2-4.(-1)(3)=13>0$

On a deux racines distinctes : $x'=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $x'=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Or ces deux nombres n'appartiennent pas à l'intervalle, donc on n'a aucune solution dans $[-1;1]$

- Sur $]1;2]$ l'équation est $x^2-x+1=0$ $\Delta=(-1)^2-4.1=-3<0$ on n'a aucune solution dans cet intervalle
- Sur $]2;+\infty[$,l'équation est $x^2+x-3=0$ $\Delta=(1)^2-4.(1)(-3)=13>0$, on a deux racines distinctes $x'=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ et $x'=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

  Or ces deux racines n'appartiennent pas à $]2;+\infty[$, donc on n'a aucune solution dans cet intervalle .

4e exemple

Soit à résoudre $|x^2-x+2|-|x+1|=0$

L'équation équivaut à $|x^2-x+2|=|x+1|$

Comme les deux membres sont positifs, l'équation équivaut à $|x^2-x+2|^2=|x+1|^2$

On a alors $|x^2-x+2|^2-|x+1|^2=0$

$((x^2-x+2)-(x+1))((x^2-x)+2+(x+1))=0$

Ce qui équivaut à $x^2-2x+1=0$ ou $x^2+3=0$

Le première équation a pour solution x=1, la deuxième n'admet aucune solution, donc

$S=\{1\}$